

APUNTES DE METEOROLOGÍA

Ernesto Cid Palacios
Meteorólogo y Catedrático de Física
Universidad de Vigo

PRÓLOGO

El interés de estos Apuntes de Meteorología es doble, por un lado exponer algunas cuestiones que no se incluyeron en los libros Física de la Atmósfera e Introducción a la Mecánica de la Atmósfera (que abreviamos con IMA), o aclarar algunos temas existentes y destacar la importancia que tiene la derivada sustancial en meteorología e incluir una lista de algunos errores encontrados en IMA, casi todos por mala transcripción de fórmulas.

INDICE DE APUNTES DE METEOROLOGÍA

APUNTES 1. (Pág. 1-28)

Métodos de la Física

- 1.1.- Algunos conceptos meteorológicos.
- 1.2.- Propiedades físicas del aire atmosférico.
- 1.3.- Algunas derivadas sustanciales.
- 1.4.- Movimiento irrotacional.
- 1.5.- Movimiento turbillionario.
- 1.6.- Variación del torbellino en la atmósfera.
- 1.7.- El vector \mathbf{Q} . La ecuación omega.
- 1.8.- La función frontogenética.

APUNTES 2. (Pág. 29-48)

- 2.1.- Ecuación de Bernoulli y del torbellino de Helmholtz.
- 2.2.- Ecuación de la vorticidad relativa.
- 2.3.- Potencial centrífugo.
- 2.4.- Derivada sustancial de la componente normal de la vorticidad absoluta en el plano de una curva cerrada
- 2.5.- Variación de la intensidad del módulo del gradiente de temperatura.
- 2.6.- La divergencia en coordenadas isobáricas.
- 2.7.- La función frontogenética en el plano sin calentamiento diabático.
- 2.8.- Giro del sistema de coordenadas x, y un ángulo β .

APUNTES 3. (Pág. 49-76)

- 3.1.- Criterios de estabilidad.
- 3.2.- Teoría matemática de la frontogénesis y frontolisis,
- 3.3.- Las ecuaciones de F_n y F_s después de un giro de ángulo β .
- 3.4.- La función frontogenética en dos dimensiones.
- 3.5.- Relaciones del viento térmico.
- 3.6.- Aplicación del vector \mathbf{Q} a situaciones sinópticas.
- 3.7.- La derivada sustancial del módulo del gradiente de la temperatura horizontal..
- 3.8.- La derivada sustancial del módulo del gradiente de la temperatura en flujo geostrófico.

Breve descripción de los Apuntes de Meteorología.

Apuntes 1 (pág. 1-28).

Métodos de la Física. Se ve como el método de las ciencias físicas descansa, además de la observación y experimentación, en la abstracción, generalización, inducción y deducción.

1) Algunos conceptos meteorológicos. Son: advección subsidencia, convección y convergencia. Se incluyen principio de compensación de Dines.

2) Propiedades físicas del aire atmosférico. Se habla de fluidos politropos, piezotropía, diabático, incompresibles, homogéneos, barotrópico, autobarotrópico y piezotrópicos.

3) Algunas derivadas sustanciales. Derivadas sustanciales de ρdV , $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$, de la cantidad de movimiento por unidad de volumen $\rho\mathbf{v}$ y del flujo específico.

4) Movimiento irrotacional. Cumple $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, y es nula la circulación de la velocidad \mathbf{v} . El campo \mathbf{v} deriva de un potencial ϕ y se estudia este campo.

5) Movimiento turbillonario. Tienen rotacional y se estudia su campo y la derivada sustancial de la circulación relativa.

6) Variación del torbellino en la atmósfera. Se estudia la derivada sustancial del vector $\boldsymbol{\zeta} = \text{rot } \mathbf{v}$ o vector torbellino y su campo. Se termina con la introducción del vector baroclino \mathbf{B} .

7) El vector \mathbf{Q} . La ecuación omega. Se define el vector desviación geostrófica o viento ageostrófico y a partir de su ecuación se llega al vector \mathbf{Q} y después se obtiene la ecuación omega.

8) La función frontogenética. Se empieza calculando la derivada sustancial del cuadrado de $\nabla\theta$ y después de $|\nabla\theta|$, obteniéndose la función frontogenética en tres dimensiones.

Apuntes 2 (pág. 29-48).

1) Ecuación de Bernoulli y del torbellino de Helmholtz. Se estudian estas ecuaciones y se obtiene la derivada sustancial de la velocidad angular de un sólido en rotación.

2) Ecuación de la vorticidad relativa. Se calcula la derivada sustancial de la vorticidad relativa y a partir de la ecuación del movimiento de un fluido no viscoso sin rotación, se obtiene la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo, su producto vectorial por ∇ y su derivada parcial con respecto al tiempo y se tiene la derivada sustancial.

3) Potencial centrífugo. La velocidad lineal de un sólido en rotación, como es el caso de la Tierra, es un vector de la forma $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de rotación y \mathbf{r} el vector de posición de un punto P que gira con la Tierra. Lo mismo que la aceleración de Coriolis o la gravitación aparente \mathbf{g} , el vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ deriva de un potencial escalar ψ que cumple: $\nabla\psi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. Este escalar se denomina potencial centrífugo. Los vectores $\nabla\psi$, $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{v} resultan perpendiculares entre sí.

4) Derivada sustancial de la componente normal de la vorticidad absoluta en el plano de una curva cerrada. Nos dice que si la curva cerrada está constituida siempre por los mismos puntos es igual al flujo del vector baroclino \mathbf{B} a través de cualquier superficie que lo contiene.

5) Variación de la intensidad del módulo del gradiente de temperatura. A partir de la derivada de orden n para una función f cualquiera se obtiene la derivada sustancial de $|\nabla_p T|$.

6) La divergencia en coordenadas isobáricas. Se obtiene la divergencia en coordenadas isobáricas (x, y, p, t) a partir de la conservación de la masa. Se escriben las ecuaciones del movimiento en el plano isobárico y se obtiene la divergencia. Con la vorticidad isobárica relativa se calcula la derivada sustancial de la vorticidad isobárica relativa.

7) La función frontogenética en el plano sin calentamiento diabático. A partir de la derivada sustancial del cuadrado del módulo de la temperatura potencial se obtiene la derivada sustancial del módulo de la temperatura potencial, la función frontogenética, que en el plano se escribe $F_h = B + C$, cuyos términos se definen. Después se obtiene su expresión en función del ángulo ϕ que forman las isolíneas de temperatura potencial con el eje x .

8) Giro del sistema de coordenadas x, y y un ángulo β . Para esto, desarrollemos las funciones derivada temporal de x e y , como funciones de x e y en serie de Taylor, teniendo en cuenta solo el primer miembro. Después se hace la transformación $(x', y') \rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{t})$, donde \mathbf{n} es el vector unitario en la dirección y sentido de $\nabla\theta$ y \mathbf{t} es el vector perpendicular a \mathbf{n} , girado 90° en sentido positivo. Haciendo girar en el plano el sistema de coordenadas (x, y) a (x', y') un ángulo β alrededor del eje z , tal que $a = b = 0$, se escriben las velocidades relativas en los dos sistemas de coordenadas (x, y) y (x', y') y las ecuaciones de transformación para las velocidades relativas y para las coordenadas (x, y) y (x', y') . Haciendo operaciones se llega a que en la rotación del ángulo β desde x al eje de dilatación x' , solo hay deformación por dilatación c' función de c y h y de $\cos 2\beta$. ¿Cómo se transforma C , segundo término de F_h después del giro? Pues, después de algunas operaciones resulta que

$$C = c' |\nabla\theta| \cos 2\beta,$$

lo que permite obtener $F_h = B + C = |\nabla\theta|(c' \cos 2\beta - b)$. También

$$F_h = |\nabla\theta|(c' \cos 2\beta - b) = \frac{1}{2} |\nabla\theta|(2c' \cos 2\beta - 2b),$$

y aparece en función de $2c'$ y $2b$ (deformación por dilatación y divergencia).

Apuntes 3 (pág. 49-76).

1) Criterios de estabilidad. La derivada sustancial de la temperatura se obtiene a partir del movimiento vertical de una partícula fluida en un campo estacionario. Si la transformación que experimenta un fluido no es adiabática, la variación local de temperatura es debida al calor diabático, a la variación adiabática local de la presión y a la variación horizontal o advección de las partículas, respectivamente. El término de advección puede ponerse en forma más simple utilizando la temperatura potencial. Entonces se deduce que el movimiento del aire produce una elevación local de temperatura cuando pasa de una región a otra de temperatura potencial θ más elevada y una disminución cuando viene de una región de temperatura potencial más fría. Según el primer principio si la elevación de una burbuja es adiabática y utilizando la ecuación de la estática de los fluidos se define el coeficiente denominado gradiente adiabático del aire seco γ y se obtiene su valor. Después se define el denominador enfriamiento geométrico o gradiente vertical de temperatura α que permite comparar las temperaturas de dos masas de aire que están en la misma vertical y distan dz . Con estos coeficientes se establecen los criterios de estabilidad,

2) Teoría matemática de la frontogénesis y frontolisis. Eligiendo unos ejes locales con el eje x paralelo a las líneas de temperatura potencial constante, aire caliente situado 90° a la derecha del eje x positivo. El eje y es, perpendicular a las líneas $\theta = \text{cte.}$, girado 90° en sentido positivo, apuntando hacia el aire frío, se obtienen en el plano isobárico las componentes F_n , que se conoce como la frontogénesis escalar y F_s como la frontogénesis de rotación, así que se conoce el vector frontogenético. Con el empleo de coordenadas cartesianas y partiendo de $\nabla\theta$ se obtiene también el vector frontogenético en el plano x, y . Utilizando los conceptos de divergencia horizontal, deformación de dilatación, vorticidad vertical y deformación por cizalladura se transforma el vector frontogenético y se define el vector \mathbf{Q} , que resulta ser el vector frontogenético F_p en el plano isobárico ($\mathbf{Q} = F_p$) y se expresan las componentes F_n , y F_s en función de las componentes Q_x y Q_y

3) Las ecuaciones de F_n y F_s después de un giro de ángulo β . Se trata de referir las ecuaciones de las componentes F_n y F_s después de un giro de ángulo β que forman el eje x' después del giro con el eje de las x , y sea δ el ángulo que forma el $\nabla_p\theta$ con el eje de las x cuyo sentido es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial, que en el hemisferio N es hacia el S. Sea \mathbf{n} el vector unitario de $\nabla_p\theta$. Entonces se expresan las derivadas con respecto a x, y de θ y se calculan F_n y F_s , que muestran que F_n comprende dos términos relacionados con la deformación de los campos de deformación $2c$ y divergencia $2b$ y F_s comprende dos términos relacionados con el campo de deformación y vorticidad relativa. A continuación, se supone que el campo de un viento no cambia a lo largo de un propio frente. y que no hay variaciones en el campo de viento a lo largo de su parte delantera de tal manera que $\partial v_x/\partial x$ y $\partial v_y/\partial y$ son ambos cero. Y aunque esto no siempre es una suposición razonable; sin embargo, ayuda a simplificar el problema. Bajo estos supuestos, como $\nabla_p\theta$ tiene la dirección de y con sentido contrario. En estas condiciones $= (-\partial\theta)_p$ donde con θ_x designamos la derivada de θ respecto a y mientras que con el subíndice p se indica que se evalúa sobre una superficie isobárica. Desarrollando la función frontogenética se ve contiene cuatro términos de

forzamiento, que son conocidos como cizallamiento, difluencia, inclinación y diabático. Se explican estos términos.

4) La función frontogenética en dos dimensiones. A partir de la expresión de la función frontogenética en dos dimensiones, que resulta de hacer $z = 0$, la función frontogenética tridimensional, con ayuda de las derivadas de v_x y v_y , con respecto a x e y , en función de los campos de deformación rotación $2a$, divergencia $2b$, dilatación $2c$ y cizalladura $2h$, se llega a que en el plano horizontal la función frontogenética, sin calentamiento diabático, es una expresión sencilla de la forma $F_h = B + C$. Esta ecuación se expresan en función del ángulo ϕ que forman las isóneas de temperatura potencial con el eje de las x y de δ el ángulo que forma el $\nabla\theta$ con el eje de las x cuyo sentido es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial. Después se estudia la transformación de C , al hacer un giro de ángulo β . Se hace una transformación $(x', y') \rightarrow (n, t)$, donde n es el vector unitario en la dirección y sentido de $\nabla\theta$ y t es perpendicular a n , girado 90° en sentido positivo. Si γ es el ángulo que forma x' con $\nabla\theta$, se llega a expresar F_h en función de $|\nabla\theta|$, $\cos\beta$, el nuevo campo de dilatación c' y de divergencia b .

5) Relaciones del viento térmico. Partiendo de la expresión del viento geostrofico en coordenadas polares se obtienen las componentes de sus derivadas con respecto a p y utilizando la ecuación de la fluidoestática se llega a las denominadas relaciones del viento térmico.

6) Aplicación del vector \mathbf{Q} a situaciones sinópticas. La ecuación omega cuasi-geostrofica **permite obtener la rapidez vertical** $\omega = dp/dt$, a partir del campo del geopotencial ψ en un instante. Esta ecuación es una excelente herramienta para el diagnóstico sobre la que se han sentado las bases del análisis del tiempo a escala sinóptica. Sin embargo, tiene dos defectos principales: los dos términos del segundo miembro de la ecuación omega cuasi-geostrofica (la advección diferencial de vorticidad geostrofica, el primer término, y el laplaciano del potencial de advección de temperatura). Pero, además, la ecuación omega cuasi-geostrofica es dependiente del sistema de referencia - estacionario o que se mueve con el flujo. Estas deficiencias motivan el deseo de obtener una nueva ecuación para movimientos sinópticos de escala vertical que no tenga estos problemas. Esta ecuación conocida como la forma vector \mathbf{Q} de la ecuación omega cuasi-geostrofica nos permite obtener la velocidad vertical $\omega = dp/dt$, a partir del campo del geopotencial ψ en un instante. En TMA se obtuvo una ecuación eliminando la tendencia del geopotencial en la ecuación de la energía termodinámica y la ecuación de vorticidad cuasi-geostrofica, pero aquí, para obtener esta ecuación utilizamos (IMA, pág 654) las ecuaciones del viento ageostrofico $\mathbf{D} = d\mathbf{G}/dt$ y la ecuación termodinámica. Haciendo operaciones se llega a la *ecuación omega en función del vector \mathbf{Q}* .

7) La derivada sustancial de $|\nabla_h T|$. Para calcular la derivada sustancial del módulo del gradiente del potencial se recurre a la fórmula general según la cual la derivada de una función de la forma f^n respecto al tiempo es de la forma $nf^{(n-1)}$. El resultado nos dice la derivada sustancial del módulo del gradiente de temperatura horizontal mediante procesos puramente geostroficos es proporcional al producto escalar del gradiente de temperatura horizontal ∇T

(con sentido aire frío hacia aire caliente) y los vectores \mathbf{Q} , lo cual a su vez depende de la orientación de los vectores, ya que el producto escalar de dos vectores puede ser nulo, si son perpendiculares y positivo (negativo) si ambos tienen la misma dirección y sentido (la misma dirección y sentidos opuestos).

8) La derivada sustancial del módulo del gradiente de la temperatura en flujo geostrófico. En flujo geostrófico la ecuación reducida de la energía termodinámica todavía se puede simplificar más, haciendo que el término velocidad vertical $S_p \omega$ desaparezca, con lo cual la derivada geostrófica de la temperatura es nula y la derivada sustancial del gradiente de temperatura resulta proporcional al vector \mathbf{Q} , con signo menos, y la derivada del módulo del gradiente es proporcional al producto escalar del gradiente de la temperatura horizontal por \mathbf{Q} . Si se tiene en cuenta la relación del viento térmico se puede calcular la expresión del gradiente de temperatura y calcular la derivada sustancial geostrófica del gradiente de temperatura, que resulta ser proporcional al vector \mathbf{Q} . Fácilmente se obtienen las componentes de este vector y se ve que tienen la misma intensidad pero sentidos opuestos, lo que parece ser consecuencia de las hipótesis introducidas, eliminación de la circulación ageostrófica y la introducción del flujo puramente geostrófico.

1 APUNTES DE METEOROLOGÍA

MÉTODOS DE LA FÍSICA

Observación y experimentación	La observación consiste en contemplar la naturaleza sin intervenir en los fenómenos que en ella tienen lugar. La experimentación consiste en llevar a cabo una observación provocando artificialmente un fenómeno en condiciones determinadas y repitiéndolo tantas veces como sea necesario
Abstracción,	Por abstracción entendemos el proceso de simplificación de un fenómeno, donde se fija la atención de determinados hechos haciendo caso omiso de otros, lo que supone que el fenómeno físico estudiado sea parecido al fenómeno real, pero no exactamente igual. Así sucede en la caída de los gra-ves donde se omite el rozamiento del aire. Con ayuda de la abstracción, intentamos deducir características comunes a todos los fenómenos y, si sometemos a examen un número suficiente de hechos análogos, podemos enunciar los principios generales en los que se basan.
Leyes empíricas	Una ley empírica es una expresión que resume un número grande de datos y contiene muchas observaciones experimentales, esquematizadas y acumuladas mediante un proceso de generalización. Una ley empírica no contiene más rigor que las medidas de los experimentos sobre los que descansan.
Inducción	Es el proceso de establecer una ley a partir de casos particulares por observación o por un número limitado de experimentos. El razonamiento inductivo se trata de justificar el paso de enunciados particulares a generales.
Ley general	El estudio comparativo de leyes particulares conduce, por inducción al descubrimiento de leyes más generales. Esta ley se pondrá a prueba por el control de la experiencia. Se admite que las leyes son inmutables.
Hipótesis Postulado	Propuestas las leyes, nacen las hipótesis, que intentan explicar el por qué de la ocurrencia de un fenómeno dado en condiciones determinadas. Posiblemente en Física, la hipótesis fundamental es que todos los fenómenos naturales se realizan de acuerdo con un conjunto de principios generales o leyes físicas, que resumen un gran número de hechos experimentales. Si una hipótesis no puede comprobarse experimentalmente se tiene un postulado.
Teoría	Si un conjunto de hipótesis ha alcanzado un estado bastante probable de certidumbre recibe el nombre de teoría, a partir de la cual se pueden deducir nuevas leyes, expresadas por medio de unas ecuaciones generales. Se admite que una teoría es más consistente y segura si tiene un esquema matemático riguroso, que puede ser utilizado para calcular y predecir y explicar multitud de fenómenos
Deducción	Proceso mental por el cual partiendo de proposiciones (hipótesis), que son tomadas como premisas, se llega mediante reglas lógicas a una proposición resultante (teoría), expresada por medio de ecuaciones generales
El método de las ciencias físicas descansa, además de la observación y la experimentación, en la abstracción, generalización, inducción y deducción.	

1.1.- ALGUNOS CONCEPTOS METEOROLÓGICOS

ADVECCIÓN. El transporte horizontal del calor, presión y humedad de un fluido en movimiento se denomina advección. El comportamiento mecánico de la atmósfera terrestre depende de la gravedad y de las condiciones de temperatura producidas por las variaciones de calor. Si fuera posible eliminar esta última causa, se obtendría una distribución atmosférica en capas de presión, temperatura y densidad constantes que coincidirían con las superficies de nivel del campo gravitatorio terrestre. Sin embargo, la desigual acción de la radiación solar y el enfriamiento del suelo y del aire dan lugar a la aparición de los gradientes de presión y temperatura, que tienden a mover el aire en el sentido de las presiones decrecientes o de las temperaturas crecientes. En las regiones sometidas a estos gradientes se observan corrientes verticales (subsistencia) y laterales (advección) que determinan el transporte horizontal de masas de aire, humedad y presión. Los vientos periódicos como las brisas y los monzones son ejemplos de tales corrientes entre regiones sometidas a alternancias periódicas del gradiente térmico. En las regiones de latitud media del hemisferio N, el viento del S determina unas temperaturas más elevadas de las que le corresponden. En este caso el viento actúa como de transmisión del calor que se importan de regiones más bajas. Por el contrario las masas de aire polar, asociadas a vientos del N, producen disminuciones de temperatura.

SUBSIDENCIA. Es un descenso lento de grandes masas de aire debido a los gradientes de presión y temperatura, que va acompañado de un ligero aumento de la temperatura y de una noble disminución de la humedad relativa.

CONVECCIÓN. Del mismo modo que en un fluido cualquiera en la atmósfera es el transporte vertical del calor como consecuencia del ascenso del aire recalentado con el suelo, debido a su menor densidad. La mayor parte de las corrientes marinas se deben a las corrientes de convección originadas por el mayor calentamiento de ciertas áreas respecto a otras. Para que se produzcan corrientes de convección basta que la diferencia de temperatura de la tierra con respecto al ambiente sea de unos pocos grados. Debido a que el calentamiento de la superficie terrestre no es homogéneo, las zonas en las que se dan las condiciones necesarias para la convección, en general, son reducidas. Cuando el nivel de condensación del aire húmedo es relativamente bajo, estas corrientes de convección dan lugar a la formación de nubes cumuliformes, las cuales en regiones montañosas pueden ser cumulonimbus, mientras que sobre las llanuras solo se originan los llamados cúmulos de buen tiempo. El calor que emana de los edificios y las calderas de las grandes ciudades da lugar a frecuentes corrientes de convección, que arrastran hacia la ciudad el aire húmedo del campo circundante, el cual después se eleva y enfría, concentrándose y produciendo la lluvia. De este modo en una ciudad industrial, debido a los núcleos de condensación y a las corrientes, la lluvia es superior en un 10% a la del campo circundante, y las nieblas invernales son el doble.

CONVERGENCIA. Movimiento horizontal del aire atmosférico cuando se dirige a una región central. El aire puede considerarse incompresible en lo que se refiere a sus movimientos naturales, por tanto, cuando el aire de las capas inferiores converge hacia zonas en las que se produce un descenso de la presión, no puede acumularse en dicha región, y se ve

obligado a ascender. Esta ascensión produce un descenso adiabático del aire y una condensación del vapor de agua contenido en él. Se forman nubes y en muchos casos llegan a producirse precipitaciones. Por eso en las regiones donde se produce la convergencia se encuentra abundante nubosidad y precipitaciones. Conviene señalar que al concepto de

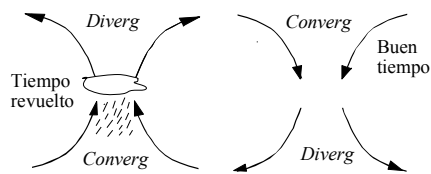


Fig. 1.1.

convergencia se asocia el concepto de divergencia. En la divergencia el aire también puede ser considerado incompresible. Es por esto que la divergencia no puede mantenerse indefinidamente en una región sin que se produzcan movimientos verticales y en la que el aire desciende desde niveles altos (fig.1.1) y fluye hacia afuera en los niveles inferiores. El aire que desciende se calienta por adiabática, y

las nubes se disipan y predomina un tiempo seco y despejado. En la atmósfera terrestre, la divergencia se presenta en los anticiclones, en altura la convergencia aparece por encima de los ciclones en desarrollo.

PRINCIPIO DE COMPENSACIÓN DE DINES. El principio de compensación de Dines (pág. 241 de Introducción de Mecánica de la Atmósfera) dice que la divergencia del flujo del viento en equilibrio es nula: $\text{div}(\rho \mathbf{v}_e) = 0$. La razón es que si en algún lugar $\text{div}(\rho \mathbf{v}_e) > 0$ habría pérdida continua de fluido, y si $\text{div}(\rho \mathbf{v}_e) < 0$ habría una acumulación continua de fluido, cosas imposibles. Esto es tanto como afirmar que en la atmósfera se encuentran zonas de convergencia y divergencia colocadas de modo alternativo, tanto en la dirección horizontal como en la vertical, de modo que en una columna de aire hay sucesivas capas de convergencia y divergencia, sin predominio de ninguna. Esto permite comprender el que un barómetro colocado a nivel del suelo en una zona de convergencia, por ejemplo en un ciclón en fase de desarrollo, sufre un notable descenso, que es indicativo de la pérdida de masa del aire presente, a pesar de la afluencia del mismo en niveles inferiores (fig. 1.1, ver parte izquierda). Esto explica la existencia de zonas de divergencia por encima del nivel de afluencia de aire, siendo la ganancia de aire en la convergencia ligeramente superior a la de la divergencia, lo cual queda reflejado en el descenso de la presión en el barómetro. También así se explica el aumento de presión que se produce en zonas de divergencia, como ocurre en el caso de un anticiclón que se refuerza, que estaría acompañado por la existencia de una zona de convergencia a niveles más altos (ver parte derecha de la fig. 1.1)

1.2.- PROPIEDADES FÍSICAS DEL AIRE ATMOSFÉRICO

Todos los movimientos atmosféricos relacionados con el tiempo están formados como resultado del calor solar. La atmósfera como una máquina térmica convierte calor en energía mecánica que, a su vez es nuevamente convertida en calor por disipación de energía por frotamiento. Esta es la razón por la cual ni la termodinámica pura ni la fluidodinámica son

suficientes para explicar los movimientos de la atmósfera; la ciencia apropiada para explicar los movimientos atmosféricos es una combinación de ellas y se denomina fluidodinámica física.

El fluido que sirve como sustancia de trabajo de una máquina térmica, que convierte calor en energía mecánica por un proceso físico sin cambios progresivos del fluido debe ser tal que los posibles estados termodinámicos de cada partícula fluida forme, al menos, una pluralidad bidimensional. Este es el caso del aire atmosférico, donde dos funciones de estado, p y ρ son forzadas a variar de forma independientemente bajo la influencia de las fuentes de calor. La teoría de tales movimientos es muy complicada y pocos resultados han sido obtenidos excepto algunos teoremas. Todas las teorías de meteorología dinámica han sido basadas en un fluido en el que los posibles estados termodinámicos de cada partícula fluida forma una variedad unidimensional denominada por V. Bjerknes y colaboradores, fluidos politrópicos. Un *fluido politrópico* no puede convertir calor en energía mecánica mediante un proceso cíclico y es inadecuado para explicar la permanencia de los movimientos atmosféricos contra la disipación de energía de rozamiento. Sin embargo, es útil explicar el movimiento de los fenómenos de relativo corto escala de tiempo, que utiliza energía almacenada como interna, cinética o potencial. Es por esto que la fluidodinámica de los fluidos politrópicos juega un importante papel en meteorología dinámica. En un fluido politrópico existe, para cada partícula, una relación entre densidad y presión de la forma $\rho = f(p)$, que es la ecuación de piezotropía. En mecánica de los fluidos la piezotropía se define como la propiedad de los fluidos en los que los procesos se caracterizan por una dependencia funcional entre las propiedades independientes. En el caso más general, la ecuación de la piezotropía puede ser diferente para todas las partículas y ser

$$\rho = f(p, a, b, c), \quad (1.1)$$

donde a, b, c son las coordenadas de Lagrange que definen las partículas individuales. No todas las coordenadas de Lagrange aparecen en la ecuación de piezotropía. En el caso más común considerado, el movimiento diabático, solo aparece un parámetro, la entropía, y la (1.1) toma la forma:

$$\rho = f(p, S). \quad (1.2)$$

En este caso la relación entre ρ y p es la misma para partículas que tienen la misma entropía, pero diferente para partículas que tienen diferente entropía. En un *fluido diabático* todas las partículas tienen la misma entropía.

Si un fluido politrópico es incompresible, $\rho \neq f(T)$, la presión puede sacarse fuera de la ecuación. El cociente diferencial ($\tau = 1/\rho$ es el volumen específico)

$$\gamma = \frac{d\rho}{dp} = \frac{df}{dp} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dp}, \quad (1-3)$$

es una medida de la compresibilidad. Si $\gamma = 0$, $\rho \neq f(T)$, el fluido se dice incompresible.

Se denomina **coeficiente piezotrópico** a

$$\pi = \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (1-4)$$

función de las variables termodinámicas y la piezotropía es la propiedad que se caracteriza por la dependencia $\rho = \text{función de las variables termodinámicas y del tiempo}$ es de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \pi \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1-5)$$

Un fluido se dice homogéneo si $\pi = 0$. Si $\pi = \gamma$ el fluido es barotrópico. Por tanto,

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (1-6)$$

luego $\rho = \rho(p)$. Como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} = \gamma \dot{p} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1-7)$$

al ser la derivada nula, por continuidad, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, así que un fluido es barotrópico si $\pi = \gamma$ y la velocidad tiene divergencia nula $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Un *fluido es auto-barotrópico* cuando la relación entre ρ y p es la misma para todas las partículas del fluido, así que

$$\rho = f(p). \quad (1-8)$$

En este caso las superficies $\rho = \text{cte.}$ coinciden en todo momento con las superficies $p = \text{cte.}$ Un fluido homogéneo e incompresible es un ejemplo de fluido auto-barotrópico. La fluidodinámica clásica puede considerarse como la dinámica de los fluidos auto-barotrópicos, es decir, dinámica de las partículas de los fluidos homogéneos e incompresibles. En contraste, la fluidodinámica física es la fluidodinámica de los fluidos piezotrópicos y más generales de dos o más variables de estado independientes.

Según el primer teorema de Bjerknes, la circulación absoluta es el flujo del vector baroclino \mathbf{B} a través de una superficie S :

$$\frac{dC_A}{dt} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla p \times \nabla \tau \cdot d\mathbf{S}. \quad (1-9)$$

donde \mathbf{B} es el *vector baroclino*. Siguiendo a Bjerknes se dice que una atmósfera es barotrópica

o barotropa si en cada punto de esa región $\mathbf{B} = 0$. Esto implica que en esa región las isosteras $\tau = \text{cte.}$ coinciden con las isobaras $p = \text{cte}$ (el caso $p = 0$, carece de interés). En otras palabras, el estado barotrópico está caracterizado por ser la densidad constante en cada superficie isobara, El coeficiente de barotropía está definido por

$$\nabla\rho = \Gamma\nabla p. \quad (1-10)$$

En una región barotrópica $\mathbf{B} = 0$, $dC_A/dt = 0$.

Un campo de densidades es baroclino si $\mathbf{B} \neq 0$, implica que ∇p y $\nabla\tau$ son distintos de cero y que las superficies isostéricas no coinciden con las superficies isobáricas.

Si un fluido permanece en reposo, $\mathbf{V} = 0$, entonces

$$C_A = \int_S \dot{V} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1-11)$$

y su estado debe ser barotrópico: $\mathbf{B} = 0$, pues $dC_A/dt = 0$. Tal estado de reposo puede ser alterado por medio de fuentes y sumideros de calor, previsto que el fluido no es piezotrópico. La densidad de un fluido sobre una superficie isobara decrecerá (crecerá) cuando está caliente (fría), así que la distribución de densidades inicialmente uniforme en la superficie llegará a ser no uniforme y el estado del fluido llegará a ser baroclino. Como resultado, toda curva material cerrada adquirirá un circulación de acuerdo con la (1-9). En la atmósfera fuentes y sumideros de calor están produciendo continuamente cambios de circulación. Aunque el movimiento resultante está fuertemente modificado por rozamientos y rotación de la Tierra, este factor que tiene solo importancia en fenómenos a gran escala, como en la circulación de los monzones y en la circulación general entre bajas y altas latitudes.

Sea o no el fluido piezotrópico, su campo de densidades, cuando el fluido está en movimiento, es normalmente baroclino ($\mathbf{B} \neq 0$), aunque puede ser barotrópico ($\pi = \gamma$) accidentalmente en ciertos instantes. Sin embargo, si en un fluido piezotrópico, la relación de piezotropía entre la función y la densidad es la misma para todas las partículas fluidas, entonces la densidad debe ser necesariamente la misma en cada superficie isobárica, lo que caracteriza la barotropía, y el campo de densidades es siempre barotrópico, cualquiera sea el movimiento del fluido. Un fluido con esta propiedad física, como vimos, se denomina autobarotrópico. Entonces la ecuación $dC_A/dt = 0$, que expresa la conservación de la circulación absoluta (y los teoremas del torbellino de Helmholtz), vale en todo tiempo.

El segundo teorema de Bjerknes es el siguiente: Si la ecuación del movimiento referida a un sistema inercial, referida a la unidad de masa, la multiplicamos por la densidad, se tiene la ecuación del movimiento referida a la unidad de volumen. Y si integramos a lo largo de la curva material cerrada, se tiene:

$$\oint \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = - \oint (\rho \nabla\psi + \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{r} = - \oint \rho d\psi, \quad (1-12)$$

si despreciamos las fuerzas de rozamiento T . Si $\rho = \text{cte}$, el segundo miembro de (1-12) es nulo para toda curva cerrada sobre una superficie equipotencial, pues $\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = d\psi$ y $\oint d\psi = 0$ y lo mismo para $\nabla p \cdot d\mathbf{r} = 0$. (ver 1.4. si no se entiende, pág. 13), Entonces se dice que el campo es potenciotrópico. Si $\nabla\psi \neq 0$, el segundo miembro de (1-12) es distinto de cero para toda curva cerrada. Entonces se dice que la densidad es potencilina.

En termodinámica un sistema termodinámico se dice que un sistema está en equilibrio termodinámico, cuando los valores numéricos de las cantidades de las propiedades del sistema (presión, temperatura, densidad, composición química, la conductividad, etc.) son las mismas en todos los puntos del sistema y no varían con el tiempo. El estado de un sistema es su situación en un instante determinado por las propiedades del sistema. La variación de una o varias de las propiedades, que definen el sistema, da lugar a un cambio de estado, una transformación o proceso. El cambio de estado es la variación de las propiedades del sistema, mientras que el proceso es la forma de evolución de ese proceso. Siempre que hay un proceso hay cambio de estado. Si la presión, volumen o temperatura permanecen constantes se dice que el cambio de estado es isobárico, isocórico o isométrico, e isotérmico. Los procesos son reversible, irreversibles, adiabáticos, diabático, etc. La descripción de un proceso fluido-dinámico requiere el conocimiento de la velocidad \mathbf{v} y el estado termodinámico en todos los puntos y en todo tiempo. En la mayoría de los casos el estado termodinámico puede considerarse determinado por dos funciones termodinámicas p y ρ . Si necesitamos tener en cuenta el efecto de la humedad se puede añadir la relación:

$$m = \frac{m_w}{m_a} = \frac{\varepsilon e_w}{p - e_w}, \quad (1-13)$$

donde m es la razón de mezcla entre la masa m_w del vapor que hay en la unidad de masa del aire seco m_a , p es la presión y e_w la tensión del vapor. El coeficiente

$$\varepsilon = \frac{R_a}{R_w} = \frac{M_w}{M_a} = 0,622 \approx \frac{5}{8}, \quad (1-14)$$

que nos dice que a igualdad de presión y temperatura, el vapor de agua pesa 0,622 veces que el aire seco. M son las masas moleculares del vapor M_w y del aire seco M_a .

1.3.- ALGUNAS DERIVADAS SUSTANCIALES

La derivada de una cantidad escalar o vectorial puede ser sustancial o total (d/dt) y derivada local o parcial ($\partial/\partial t$). La derivada sustancial de una cantidad escalar o vectorial es la velocidad de cambio de una cantidad de una magnitud.

1) La derivada de sustancial de ρdV , donde ρ es la densidad y dV un elemento de volumen. Una partícula fluida de volumen dV y densidad ρ , en el instante t , tiene una masa $dm = \rho dV$ y puesto que ésta debe ser constante, su derivada con respecto al tiempo debe ser nula y se puede escribir: $\rho dV = \rho \delta x \delta y \delta z$. Entonces:

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = \frac{d}{dt} \ln(\rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) = \frac{d}{dt}(\ln \rho + \sum \ln \delta x_i) = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \sum \frac{1}{\delta x_i} \frac{d}{dt} \delta x_i = 0,$$

donde aplicamos la derivación sustancial por tratarse de un elemento de volumen constituido siempre por la misma cantidad de sustancia. Más como

$$\sum \frac{1}{\delta x_i} \frac{d}{dt} \delta x_i = \sum \frac{1}{\delta x_i} \delta v_{x_i} = \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} = \text{div } \mathbf{v}, \quad (1-15)$$

resulta:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1-16)$$

que es la ecuación de continuidad. Esta forma de obtención es interesante porque puede generalizarse a coordenadas cualesquiera. De la ecuación de continuidad, resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}, \quad (1-17)$$

puesto que $\rho\tau = 1$, y como $\tau = V/m$ el volumen específico es proporcional al volumen. Así que la divergencia de la velocidad representa la variación relativa de volumen para una variación de tiempo unidad.

2) La derivada sustancial de la circulación elemental $dC = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ es

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2} d v^2,$$

y la circulación a lo largo de una línea cerrada es

$$C = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{r}) = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1-18)$$

pues la segunda integral es nula. Se puede sustituir en la aceleración

$$\dot{\mathbf{v}} = -\tau \nabla p - \nabla \psi - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

o sin la aceleración de Coriolis para un movimiento sin rotación. Entonces

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = -\tau dp - d\psi - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

donde el último sumando representa el doble del volumen del paralelepípedo de lados $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} y $d\mathbf{r}$. La circulación es:

$$C = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = - \oint \tau dp - 2 \oint \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} . \quad (1-19)$$

pues $\oint d\psi = 0$.

3) Derivada sustancial de $\mathbf{v}dV$, donde dV es un elemento de volumen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}dV = \dot{\mathbf{v}}dV + \frac{d}{dt} (\mathbf{v}dV) = \dot{\mathbf{v}}dV + \mathbf{v} \frac{d}{dt} (dV),$$

siendo (recuérdese que $d\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} d\mathbf{r}$):

$$\frac{d}{dt} (dV) = \frac{d}{dt} (dS d\mathbf{r}) = \frac{d}{dt} (dS) d\mathbf{r} + dS d\mathbf{v} = \left(\frac{d}{dt} (dS) + \nabla \mathbf{v} dS \right) d\mathbf{r}, \quad (1-20)$$

Según (1-17) la ecuación de dimensiones de $\nabla \cdot \mathbf{v}$ es T^{-1} y la de $\nabla \cdot \mathbf{v} dV$ es $L^3 T^{-1}$, la misma que la derivada sustancial de dV . Por tanto:

$$\frac{d}{dt} (dV) = \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \nabla \cdot \mathbf{v} dS d\mathbf{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} dS = \frac{1}{d\mathbf{r}} \frac{d}{dt} (dV) = \frac{d}{dt} (dS) + dS \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (1-21)$$

4) El flujo elemental a través de una superficie elemental $d\mathbf{S}$ es: $d\boldsymbol{\phi} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ y el flujo total:

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{S}) = \int \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{S} + \int \nabla \cdot \mathbf{v} dS - \int \nabla \mathbf{v} d\mathbf{S}, \quad (1-22)$$

5) Derivada sustancial de la cantidad de movimiento por unidad de volumen $\rho \mathbf{v}$.

$$\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}), \quad (1-23)$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \nabla v^2 + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} \\ &= -\nabla \psi - \tau \nabla p - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (1-24)$$

donde hemos utilizado la conocida igualdad vectorial:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad \dot{\mathbf{v}} = -\nabla \psi - \tau \nabla p - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} .$$

y la ecuación del movimiento para una Tierra en rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ constante; luego sustituyendo en la (1-23), resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} &= \rho(-\nabla\psi - \tau\nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho \mathbf{v}) \\
&= -\rho(\nabla\psi + \tau\nabla p) - \rho(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho \mathbf{v}) \\
&= -\rho(\nabla\psi + \tau\nabla p) + \rho[\mathbf{v} \times (2\boldsymbol{\omega} + \text{rot} \mathbf{v})] + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho \mathbf{v}) .
\end{aligned} \tag{1-25}$$

de manera que

$$\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} = \rho \nabla\psi + \nabla p + \rho[\mathbf{v} \times (2\boldsymbol{\omega} + \text{rot} \mathbf{v})] + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho \mathbf{v}) . \tag{1-26}$$

6) Aceleración de la circulación del flujo específico

Se denomina flujo específico la integral

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} , \tag{1-27}$$

que es la circulación de la cantidad de movimiento por unidad de volumen y la aceleración o derivada sustancial del flujo específico es:

$$\frac{d}{dt} \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\rho} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} + \oint \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{r} ,$$

pero, al mismo tiempo

$$\dot{\rho} = -\rho \text{div} \mathbf{v} , \quad \dot{\mathbf{v}} = -\nabla\psi - \tau\nabla p , \quad \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = -\rho d\psi - dp \tag{1-28}$$

luego la derivada sustancial del flujo específico es:

$$\frac{d}{dt} \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\oint \rho \mathbf{v} \text{div} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \oint \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} - \oint \tau dp + \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} . \tag{1-29}$$

La integral

$$-\oint \tau dp = N(p, \tau) , \tag{1-30}$$

es el número de solenoides (τ, p) . Si suponemos que $\rho \mathbf{v} = \boldsymbol{\eta}$, el primer término del segundo miembro tendrá la misma forma que el segundo término, luego

$$\frac{d}{dt} \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = N(\boldsymbol{\eta}, \text{div} \mathbf{v}) + N(\psi, \rho) + N(p, \tau) + N\left(\frac{1}{2}v^2, \rho\right) , \tag{1-31}$$

ya que

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint \rho dv^2 , \tag{1-32}$$

luego como en la atmósfera $\text{div } \mathbf{v}$ y $\nabla v^2/2$ son muy pequeños se pueden suprimir el primero y cuarto término de la ecuación (1-31).

El gradiente de ψ es el potencial gravitatorio que tiende a moverse hacia el ∇p , pero es mejor cambiar los signos y el orden y creer que gradiente de τ tiende a girar poniéndose en sentido contrario al gradiente de ψ ; y como $\nabla\psi$ es vertical y hacia arriba ($\mathbf{g} = -\nabla\psi$ es hacia abajo) $\nabla\tau$ tiende a ponerse vertical y hacia abajo.

De los otros términos se deduce:

$N(\eta, \text{div } \mathbf{v})$ nos dice que si en un flujo específico existe una partícula fluida que se dilata tiende a ir contra la corriente. Si suponemos dos partículas fluidas que se dilatan cada una en el campo de la otra, tienden a acercarse. Esto explica que dos barcas próximas en un río tienden a acercarse al pasar una corriente entre ellas y la coagulación de ciertos coloides.

$N(v^2/2, \rho)$ nos dice que en un flujo específico el $\nabla\rho$ tiende a coincidir con $\nabla v^2/2$.

Utilizando el teorema de Stokes, la (1-32) se escribe:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot}(\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1-33)$$

pero

$$\text{rot}(\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = (\rho \text{rot } \mathbf{v} + \nabla\rho \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1-34)$$

Veremos después otra derivada sustancial, en 1.5. interesante, la variación del torbellino en la atmósfera.

1.4.- MOVIMIENTO IRROTACIONAL

Definido un vector \mathbf{v} , campo de velocidades de un fluido en movimiento, diremos que el movimiento en todos los puntos en los que \mathbf{v} está definido es irrotacional si, en todos ellos, se satisface la condición:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0. \quad (1-35)$$

Calculando la circulación de \mathbf{v} , el virtud del teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1-36)$$

resulta nula, de donde se concluye que $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ es diferencial exacta: $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = d\psi$, y por tanto:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \psi = \nabla\psi. \quad (1-37)$$

La función ψ suele llamarse función de campo, la función $\varphi = -\psi$ se denomina función potencial o potencial escalar. Podemos poner

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi, \quad (1-38)$$

que nos dice que todo campo irrotacional deriva de un potencial. El recíproco también es cierto pues aplicando el rotacional en (1-38) se obtiene (1-35).

El concepto de gradiente se introduce para poder saber como varia un campo escalar al pasar de un punto a otro. Si se consideran dos puntos, $P(x, y, z)$ y $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$, del campo escalar φ el vector que une estos puntos es:

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \quad (1-39)$$

y la variación de φ al pasar del punto P al punto Q vendrá dada por la expresión siguiente:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz, \quad (1-40)$$

y el gradiente de la función escalar φ es el vector

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}, \quad (1-41)$$

El operador ∇ , introducido por Hamilton, se llama operador nabla. Este operador aplicado a una función escalar nos da el gradiente de este escalar. El gradiente de un escalar es un vector, $\nabla\varphi$, cuyas componentes son las derivadas parciales de φ con respecto a x, y, z . $\nabla\varphi$ indica cómo varia la función φ en las proximidades del punto $P(x, y, z)$. Según (1-39) y (1-41), podemos escribir la (1-40) en la forma

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}, \quad (1-42)$$

y si $d\mathbf{r} = \mathbf{u}_r ds$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{u}_r, \quad (1-43)$$

es la componente de $\nabla\varphi$ en la dirección de \mathbf{u}_r . Se llama derivada de φ en la dirección de \mathbf{u}_r , o derivada de φ según \mathbf{u}_r . Esta derivada es una medida de como varia φ al movernos en la dirección de \mathbf{u}_r . La derivada direccional de una función φ es máxima en la dirección del vector $\nabla\varphi$ y es igual al módulo de este vector.

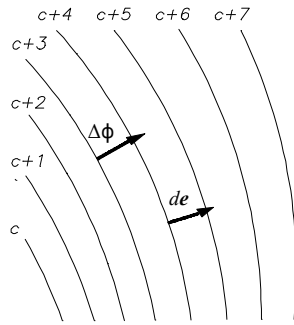
La dirección de $\nabla\varphi$ es normal en cada punto a las superficies equiescales, $\varphi = \text{cte}$. pues si $d\mathbf{r}$ está sobre una superficie equiescalar (los puntos P y Q pertenecen a esta superficie),

$d\phi = 0$ y, de (1-42), resulta:

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{1-44}$$

En cuanto al sentido de $\nabla\phi$ se elige de modo que corresponda a valores crecientes de la función ϕ (fig 1.1).

Si $d\mathbf{e} = n de$, donde de es el espesor de las láminas unidad y n el vector unitario de $d\mathbf{e}$ (que no tiene por que ser unitario) es normal a las superficies equiescalares ϕ , paralelo a $\nabla\phi$, que tiene el sentido de las ϕ crecientes y por módulo el espesor de la lámina unidad, según la ecuación (1-44), ya que la variación de la función al pasar de una superficie equiescalar a la siguiente es la unidad, tendremos::



$$|\nabla\phi| de = 1, \tag{1-45}$$

el módulo del gradiente de un escalar es igual al inverso del espesor de la lámina unidad. Según la ecuación (1-43), como $d\mathbf{r} = \mathbf{u}_r ds$,

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \mathbf{u}_r = |\nabla\phi|, \tag{1-46}$$

y, por consiguiente:

Fig. 1.1.

$$\nabla\phi = |\nabla\phi| \mathbf{u}_r = \frac{d\phi}{ds} \mathbf{u}_r. \tag{1-47}$$

Si tomamos como función escalar el módulo de \mathbf{r} , $\phi = r$, las superficies equiescalares son esferas centradas en el origen de coordenadas y, según la ecuación (1-46), ∇r tiene, en todo punto, la dirección de \mathbf{u}_r y por modulo la unidad:

$$\frac{dr}{ds} = \nabla r \cdot \mathbf{u}_r = |\nabla r| = 1, \tag{1-48}$$

luego ∇r es el versor del vector \mathbf{r} : $\nabla r = \mathbf{u}_r$.

Dado el campo escalar ϕ la aplicación del operador nabla nos permite obtener el vector $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Inversamente, dado el vector \mathbf{v} , se puede obtener siempre un campo escalar ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla\phi$? Cuando se estudia este problema se ve que, en general, no es siempre posible la existencia de ϕ . También se analizan qué condiciones debe cumplir \mathbf{v} para determinar ϕ .

En un campo vectorial, se llaman **líneas del campo** a las que cumplen la condición de que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Las líneas del campo de vector velocidad se llaman líneas de corriente. El conjunto de líneas del campo en un instante dado se llama imagen del campo. Las ecuaciones diferenciales de estas líneas, en coordenadas cartesianas, son:

$$\frac{dx}{v_x} + \frac{dy}{v_y} + \frac{dz}{v_z}, \quad (1-49)$$

Las líneas de corriente proporcionan una representación geométrica muy clara del campo. Aunque por cada punto del espacio solo pasa una línea de corriente, se conviene en dibujar las líneas de corriente de modo que, considerando una superficie de área unidad perpendicular a ellas, el número de las que resulten cortadas coincide con el valor numérico del módulo del campo en el punto medio de la superficie. En otras palabras, el módulo del campo es numéricamente igual a la densidad de líneas (número de líneas por unidad de superficie) en todos los puntos del espacio. De este modo, en las regiones del campo donde las líneas del campo están muy apretadas, la intensidad del campo es mayor que en las regiones donde las líneas aparecen más espaciadas.

Multiplicando la (1-38) por $d\mathbf{r}$,

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = -d\phi,$$

entonces la procesión de \mathbf{v} desde un punto P a otro Q será:

$$\int_P^Q \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q d\phi = \phi(P) - \phi(Q), \quad (1-50)$$

y no depende de la forma de la curva, solo depende de la posición de los puntos extremos. Si $Q = P$, la curva es cerrada y teniendo en cuenta el teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-51)$$

válida cualquiera que sea la superficie S , limitada por el contorno de la línea a lo largo de la cual se calcula la circulación.

Los campos vectoriales que cumplen la ecuación (1-38) se denominan **campos conservativos**. Tales campos cumplen, pues, la condición de que *la procesión no depende del camino* y que *la circulación es nula*. Los campos conservativos son campos irrotacionales ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$). Esta función escalar se llama *función potencial* o *potencial escalar*. Si un campo es conservativo diremos que deriva de un potencial y escribiremos:

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi.$$

Si calculamos la divergencia de \mathbf{v} , se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla^2\phi.$$

El flujo del campo de velocidades: consideremos un elemento de superficie $dS = n dS$ en un punto P de un dominio en el cual esté definido un campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Si P es un punto de dS , se llama flujo elemental del campo a través de dS al escalar $d\phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$. El flujo del campo a través de una superficie finita S es

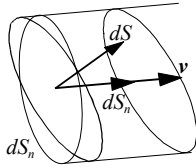


Fig. 1.2.

$$\phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div } \mathbf{v} \cdot dV, \quad (1-52)$$

En cuanto a la significación geométrica del flujo basta tener en cuenta que \mathbf{v} representa el número de líneas vectoriales que pasan por la unidad de superficie normal al campo, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v dS_n$ indica el número de líneas vectoriales que atraviesan dS_n , que es el mismo que atraviesan dS , el flujo indica el número de líneas del campo que atraviesan la superficie S (contándose positivamente de dentro afuera, si la superficie es cerrada, y negativamente de fuera adentro, puesto que el coseno del ángulo que forman \mathbf{v} y $d\mathbf{S}$ es positivo y negativo, respectivamente).

El conjunto de líneas del campo que pasan por los puntos de una línea cerrada cualquiera, toda ella situada en el dominio D , se llama **tubo de flujo o tubo de las líneas de corriente** (fig 1.2). Si en un tubo de flujo consideramos dos contornos c_1, c_2 , y las superficies S_1, S_2 limitadas por estos contornos, tenemos una superficie cerrada. El flujo total se compone por el flujo que atraviesa la superficie lateral, que es nulo (pues, \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{n}), y el que atraviesa las bases. Y si todas las líneas que entran por S_1 salen por S_2 , el flujo total: $\phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$, es nulo. Es decir:

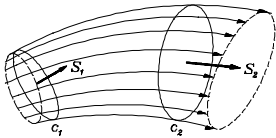


Fig. 1.3.

$$\phi_2 = \phi_1 \quad (1-53)$$

y en estas condiciones, a lo largo de un tubo de flujo, el flujo es constante a través de toda superficie limitada por cualquier contorno del mismo. En otras palabras, a lo largo de un tubo de líneas de corriente, el flujo se conserva.

1.5.- MOVIMIENTO TURBILLONARIO

En contraste con los campos irrotacionales, en los que el vector campo tiene rotacional nulo, consideremos un campo vectorial \mathbf{v} , velocidad de un fluido, cuyo rotacional sea diferente de cero en cada punto o en ciertos puntos de la región fluida:

$$\text{rot } \mathbf{v} \neq 0. \quad (1-54)$$

Estos campos se llaman campos rotacionales o turbillonarios, y el vector

$$\boldsymbol{\zeta} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad (1-55)$$

se denomina vector torbellino o simplemente torbellino. Si un campo vectorial cumple la ecuación (1-55) en todos los puntos, se dice que \mathbf{v} es el *potencial vector* del campo ζ . Vamos a ver que un campo que cumple (1-55) en todos los puntos de un dominio es solenoidal y, por lo tanto de flujo conservativo. Diremos entonces que \mathbf{v} es el potencial vector del campo ζ . Puesto que se cumple (1-54) el vector torbellino no tendrá un potencial de velocidades. En virtud del teorema de Stokes:

$$\oint_S \zeta \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot} \zeta \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-56)$$

expresión que es válida cualquiera que sea la superficie abierta S que se apoya en el contorno de la curva cerrada. Luego, en general la circulación del vector torbellino no es nula.

Se llama líneas de torbellino aquellas que tienen por vector tangente en cada uno de sus puntos el vector torbellino. Tubo de torbellino es la superficie formada trazando por cada punto de una curva cerrada las líneas de torbellino que pasan por él. Un filamento de torbellino es un tubo de torbellino cuya sección recta es de dimensiones infinitesimales. El flujo del torbellino a través de la superficie de torbellino, según el teorema de Gauss, es:

$$\int \zeta \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div} \mathbf{v} \cdot dV = 0, \quad (1-57)$$

pues

$$\text{div} \zeta = \text{div} \text{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (1-58)$$

de manera que la divergencia del torbellino es nula en todos sus puntos, lo que nos dice que el vector torbellino es solenoidal, es decir, las líneas de torbellino deben ser cerradas, terminan en una superficie límite o se extienden hasta el infinito. Como además, el flujo del torbellino es nulo a lo largo de un filamento, el torbellino es constante en un campo irrotacional.

Según el teorema de Kelvin, la derivada sustancial de la circulación es la circulación de la aceleración, por consiguiente,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1-59)$$

pero la aceleración a lo largo de una curva fluida cuando el fluido está sometido solo a la gravedad es:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\tau \nabla p + \mathbf{g}, \quad (1-60)$$

luego

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} - \oint \tau \nabla p \cdot d\mathbf{r} . \quad (1-61)$$

La primera integral es nula por ser $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, luego:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = - \oint \tau \nabla p \cdot d\mathbf{r} = N(p, \tau) = A . \quad (1-62)$$

es el número de solenoides unidad del campo (p, τ) abarcados por la curva cerrada y A el área encerrada por la representación de dicha curva en el diagrama p, τ . Cuando la densidad es constante o $\tau = f(p)$, resulta:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (1-63)$$

por tanto, en los fluidos incompresibles o en los *autobarotrópos* (en los que $\tau = f(p)$ se da siempre) o cuando se da de modo accidental (barotropía) la circulación de la velocidad es constante a lo largo de una curva fluida. Naturalmente, si inicialmente la circulación de la velocidad es nula, seguirá siéndolo, lo cual, en virtud del teorema de Stokes exige que, en todos los puntos a lo largo de toda curva, $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Aplicando la conservación de la circulación de la velocidad, se demuestra inmediatamente el teorema de Helmholtz respecto al torbellino en los fluidos autobarotrópos, pues, según el teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \text{cte} . \quad (1-64)$$

nos dice que el flujo del torbellino, $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}$, es constante a toda superficie que se apoye en el contorno. Si consideramos una superficie cerrada S que se apoya en el contorno c , este contorno divide a S en dos superficies S_1 y S_2 (fig. 1.4). Los flujos de \mathbf{v} a través de estas superficies son iguales en valor absoluto, ya que se apoyan en el mismo contorno $|\Phi_1| = |\Phi_2|$. Por tanto, el flujo total del torbellino a través de la superficie S es:

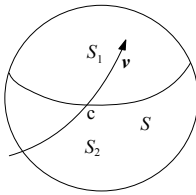


Fig. 1.4.

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 0 .$$

el flujo es conservativo y el campo \mathbf{v} es solenoidal. De forma que, si un campo ζ , definido en cierto dominio, admite un potencial vector \mathbf{v} , tal que $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}$, el campo flujo es conservativo y el campo es solenoidal. Recíprocamente, si el flujo de un campo ζ es conservativo el campo es solenoidal y admite un potencial vector. En otras palabras, si $\text{div } \zeta = 0$, $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}$. Desde luego este es te vector no es único pues si \mathbf{v} es un vector potencial del campo solenoidal ζ y $\phi(x,y,z)$ es una función escalar, el vector $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \nabla\phi$ también es un vector potencial, pues, se cumple: $\text{rot } \mathbf{v}_1 = \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \nabla\phi = \text{rot } \mathbf{v}$.

Recíprocamente, si $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}$, también $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}_1$ y $\text{rot}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) = 0$ y el campo $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ es irrotacional y existe una función del campo ϕ tal que $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = -\nabla\phi$, de donde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \nabla\phi$. Por consiguiente, hallado un vector potencial \mathbf{v} , la fórmula $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \nabla\phi$ nos dará la expresión general del vector potencial. La demostración, que omitimos, (está en nuestro libro VECTORES Y CAMPOS) se hace buscando una solución particular cualquiera de la ecuación en derivadas parciales: $\zeta = \nabla \times \mathbf{v}$, con la condición, por ejemplo, $v_x = 0$.

1.6.- VARIACIÓN DEL TORBELLINO EN LA ATMÓSFERA

Otra derivada sustancial interesante es la derivada sustancial del torbellino, es decir, la derivada de $\zeta = \text{rot } \mathbf{v}$.

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} . \quad (1-65)$$

Los operadores ∇ y derivadas respecto a t son conmutables. Pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \nabla v^2 + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \\ &= -\nabla \psi - \tau \nabla p - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) . \end{aligned} \quad (1-66)$$

luego sustituyendo en la (1-17), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} &= \text{rot} (\nabla \psi - \tau \nabla p - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} \\ &= \nabla p \times \nabla \tau - \text{rot} (2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \text{rot } \mathbf{v} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} \\ &= \nabla p \times \nabla \tau + \text{rot} [\mathbf{v} \times (2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v})] + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (1-67)$$

o también

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \nabla p \times \nabla \tau + \begin{vmatrix} \mathbf{v} & 2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \mathbf{v} & \cdot \nabla (2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} & 2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v} \end{vmatrix} + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} . \quad (1-68)$$

pero $\nabla(2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \text{rot } \mathbf{v}$, y $-\nabla \text{rot } \mathbf{v}$ tiene signo contrario al último término, resulta:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \nabla p \times \nabla \tau - (2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v}) \text{div } \mathbf{v} + (2 \boldsymbol{\omega} + \text{rot } \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} . \quad (1-69)$$

Supongamos que en principio en la atmósfera no exista $\text{rot } \mathbf{v}$, su formación tiene como causa el no paralelismo de los vectores ∇p y $\nabla \tau$, falta de barotropía y rotación terrestre. En virtud del teorema de circulación, suponiendo el fluido incompresible la derivada de la circulación absoluta (o relativa) con respecto al tiempo de una curva material es nula y, por

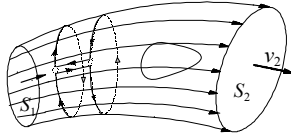


Fig. 1.5.

tanto, es constante. En otras palabras, en un fluido incompresible, la circulación no varía con el tiempo, aunque la curva varíe con el tiempo.

Consideremos un tubo de torbellino donde cada línea a lo largo del torbellino es tangente en cada punto al rotacional de la velocidad en ese punto. Un tubo de torbellino será siempre un torbellino. Consideremos una curva cerrada dibujada sobre el tubo del torbellino. La circulación sobre ella es cero pues es siempre normal a ella y como la circulación se conserva, el tubo de torbellino seguirá siendo un torbellino. Otra propiedad es que el flujo de torbellino es constante a lo largo del tubo de torbellino. Cortemos el tubo por dos superficies y dibujemos como en la figura la línea continua. La circulación a lo largo de la línea continua es nula ya que es una curva cerrada sobre la superficie.

La ecuación (1-75) se puede escribir en la forma:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathbf{B} + (2\boldsymbol{\omega} + \zeta) \operatorname{div} \mathbf{v} + (2\boldsymbol{\omega} + \zeta) \cdot \nabla \mathbf{v} . \quad (1-70)$$

donde \mathbf{B} es el vector baroclino. Para obtener la componente vertical de la vorticidad basta multiplicar por el vector unitario \mathbf{k} del eje z . Pero siendo φ la latitud,

$$2\boldsymbol{\omega} = 2\omega(\cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}) , \quad 2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = 2\omega \sin \varphi = l , \quad (1-71)$$

que es el parámetro de Coriolis. Entonces:

$$\frac{d(\zeta_z + l)}{dt} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} + (\zeta_z + l) \operatorname{div} \mathbf{v} + (2\boldsymbol{\omega} + \zeta) \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} . \quad (1-72)$$

pues l no depende de t ni de z . Como $\zeta_z + l = (\zeta_A)_z$, es la componente vertical de la vorticidad absoluta, se tiene:

$$\frac{d(\zeta_A)_z}{dt} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} + (\zeta_A)_z \operatorname{div} \mathbf{v} + (\zeta_A)_z \cdot \nabla \mathbf{v} . \quad (1-73)$$

que es otra forma de la ecuación de la vorticidad absoluta vertical.

1.7.- EL VECTOR Q. LA ECUACIÓN OMEGA.

La ecuación del movimiento horizontal del viento real o viento reinante sin rozamiento y la ecuación del viento geostrófico son:

$$\text{Viento reinante} \quad \dot{\mathbf{v}} = -\tau \nabla p - j l \mathbf{v} , \quad (1-74)$$

$$\text{Viento geostrófico} \quad 0 = -\tau \nabla p - j l \mathbf{G}. \quad (1-75)$$

Restando estas ecuaciones, se tiene:

$$\dot{\mathbf{v}} = -j l (\mathbf{v} - \mathbf{G}), \quad (1-76)$$

que es la ecuación que establecería un observador que se deja llevar por el viento geostrófico. Despejando el viento real, el segundo termino es el vector \mathbf{D} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{G} + j \frac{\dot{\mathbf{v}}}{l}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{v} - \mathbf{G} = j \frac{\dot{\mathbf{v}}}{l}, \quad (1-77)$$

se denomina desviación geostrófica, y también, viento ageostrófico, En la aproximación geostrófica donde $\mathbf{v} = \mathbf{G}$, se tiene:

$$l \mathbf{D} = j \dot{\mathbf{G}}, \quad \frac{d\mathbf{G}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \mathbf{G} = -j l \mathbf{D}, \quad (1-78)$$

(j es la unidad imaginaria, l la aceleración de Coriolis) que en sus componentes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) G_x = l D_y, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) G_y = -l D_x. \quad (1-79)$$

De la primera de estas ecuaciones y de la ecuación cuasigeostrófica de la energía termodinámica cuando el calentamiento diabático es pequeño:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) G_x - l D_y = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) - \sigma \omega = 0, \quad (1-80)$$

donde σ es el parámetro de estabilidad fluidoestática. Derivando la primera de (1-80) respecto a la presión p y multiplicando después por l , resulta:

$$\frac{d_G}{dt} \left(l \frac{\partial G_x}{\partial p} \right) + l \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla G_x - l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} = 0, \quad (1-81)$$

pues l no depende de t . Y derivando la ecuación de la energía (1-81) con respecto a y :

$$\frac{d_G}{dt} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial y} \right) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1-82)$$

Teniendo en cuenta que en coordenadas isobáricas $l \mathbf{G} = j \nabla \psi$, donde ψ es el geopotencial,

$$l G_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad l G_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad G_x = -\frac{1}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad G_y = \frac{1}{l} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1-83)$$

Aplicando el operador ∇ a estas dos primeras ecuaciones, se tiene:

$$l\nabla G_x = \nabla \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right), \quad l\nabla G_y = \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1-84)$$

Si al deducir la ecuación omega suponemos que el parámetro de Coriolis l no es constante, al derivar respecto a p las dos primeras ecuaciones de (1-83), se obtiene:

$$\frac{\partial l}{\partial p} G_x + l \frac{\partial G_x}{\partial p} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial y}, \quad \frac{\partial l}{\partial p} G_y + l \frac{\partial G_y}{\partial p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial x}, \quad (1-85)$$

y como $l = l_0 + \beta y$, siendo l_0 y β constantes,

$$l \frac{\partial G_x}{\partial p} = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial y} + \beta \frac{\partial y}{\partial p} G_x \right), \quad l \frac{\partial G_y}{\partial p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial x} - \beta \frac{\partial y}{\partial p} G_y. \quad (1-86)$$

Si desarrollamos el segundo término de (1-84), y teniendo en cuenta (1-86), se puede escribir

$$l \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla G_x = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\beta}{l} \frac{\partial y}{\partial p} (\mathbf{G} \cdot \nabla \cdot \mathbf{G}), \quad (1-87)$$

y como $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$, la ecuación (1-87) se convierte en:

$$l \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla G_x = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right), \quad (1-88)$$

y teniendo en cuenta la (1-84):

$$\begin{aligned} l \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} \cdot \nabla G_x &= l \left(\frac{\partial G_x}{\partial p} \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial p} \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial y} + \beta \frac{\partial y}{\partial p} G_x \right) \frac{\partial G_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial x} - \beta \frac{\partial y}{\partial p} G_y \right) \frac{\partial G_x}{\partial y} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial G_x}{\partial y} \right] - \frac{\beta}{l} \frac{\partial y}{\partial p} \left(G_x \frac{\partial G_x}{\partial x} + G_y \frac{\partial G_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

y la ecuación (1-81) se convierte en:

$$\frac{d_G}{dt} \left(l \frac{\partial G_x}{\partial p} \right) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) = l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p}, \quad (1-89)$$

y volviendo a escribir la (1-82):

$$\frac{d_G}{dt} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial y} \right) - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) = \sigma \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (1-90)$$

y restando a la segunda la primera, tenemos

$$\sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} - l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} = -2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) - \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial y} + l \frac{\partial G_x}{\partial p} \right), \quad (1-91)$$

y según (1-86):

$$\sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} - l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} = -2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) + \beta \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial p} G_x \right). \quad (1-92)$$

De forma análoga repitiendo la operación con la otra ecuación del movimiento y la ecuación de la energía se llega a

$$\sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} - l^2 \frac{\partial D_x}{\partial p} = -2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) + \beta \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial p} G_y \right), \quad (1-93)$$

y haciendo (pág. 763 del libro (IMA) Introducción a la Mecánica de la Atmósfera)

$$Q_x = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right), \quad Q_y = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right), \quad (1-94)$$

así que el vector \mathbf{Q} es de la forma:

$$\mathbf{Q} = Q_x + j Q_y = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) = \nabla \mathbf{G} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right), \quad (1-95)$$

y teniendo en cuenta la relación que liga el potencial con la temperatura:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} = -\frac{R_a}{p} T = -\tau, \quad (1-96)$$

(R_a constante aire seco) se puede poner para componentes del vector \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = -\frac{R_a}{p} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) \cdot \nabla T \right] = -\frac{R_a}{p} \nabla \mathbf{G} \cdot \nabla T, \quad (1-97)$$

de manera que las componentes de \mathbf{Q} representan las variaciones de temperatura y a las variaciones del viento geostrófico. En componentes:

$$Q_x = -\frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T \right), \quad Q_y = -\frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T \right), \quad (1-98)$$

Las ecuaciones (1-95) y (1-96), teniendo en cuenta las componentes de \mathbf{Q} se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} - l^2 \frac{\partial D_x}{\partial p} &= -2Q_x + \beta \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial p} G_x \right), \\ \sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} - l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} &= -2Q_y + \beta \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial p} G_y \right), \end{aligned} \quad (1-99)$$

de manera que si multiplicamos por j la segunda y sumamos, resulta:

$$\sigma \nabla \omega - l^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p} = -2\mathbf{Q} + \beta \frac{d_G}{dt} \left(G_x \frac{\partial y}{\partial p} + j G_y \frac{\partial x}{\partial p} \right). \quad (1-100)$$

Como según (1-86),

$$G_x = -\frac{1}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad G_y = \frac{1}{l} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

sustituyendo en (1-100), resulta:

$$\sigma \nabla \omega - l^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p} = -2\mathbf{Q} + \frac{\beta}{l} \frac{d_G}{dt} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} \right), \quad (1-101)$$

pues l no depende del tiempo. es decir:

$$\sigma \nabla \omega - l^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p} = -2\mathbf{Q} + \frac{\beta}{l} \frac{d_G}{dt} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} + j \frac{\partial \psi}{\partial p} \right), \quad (1-102)$$

y recordando la (1-96):

$$\sigma \nabla \omega - l^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p} = -2\mathbf{Q} + \frac{\beta}{l} \frac{d_G}{dt} (-\tau + j\tau), \quad (1-103)$$

El vector $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es un vector en el tercer cuadrante (formando un ángulo de 135° con el eje de las x , de módulo $\sqrt{2}$. La (1-103) es la función omega en el caso de que $l = 2\omega \sin \varphi = l_0 + \beta y$ es distinta de cero y τ no es constante. En el caso de que $\beta = 0$ (lo es en el ecuador pero no en latitudes medias), es decir, $l = l_0$, constante, se cumple:

$$\sigma \nabla \omega - l^2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial p} = -2\mathbf{Q}, \quad (1-104)$$

que es la ecuación omega en función del vector \mathbf{Q} , si $l = \text{cte}$. Y calculando divergencias:

$$\sigma \nabla^2 \omega - l^2 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial p} = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (1-105)$$

y como $\mathbf{D} = \mathbf{v} - \mathbf{G}$, y $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{D}$ puede ser sustituido haciendo uso de la ecuación de continuidad aplicable en el sistema cuasi-geostrófico

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (1-106)$$

y como $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \mathbf{v} = -(\partial \omega / \partial p)$ se tiene:

$$\sigma \left(\nabla^2 + l^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (1-107)$$

que para ω positivo ($\omega > 0$) hay ascenso del aire (recuérdese que $\omega = \rho g v_z$) y $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ es negativo y, por tanto, hay divergencia; si ω es negativo ($\omega < 0$) hay descenso del aire y hay convergencia. Con ω se designa la rapidez vertical en coordenadas isobáricas, equivalente a la z en coordenadas cartesianas.

1.8.- LA FUNCIÓN FRONTOGENÉTICA

Para calcular la derivada sustancial del módulo del gradiente de la temperatura potencial θ , $|\nabla_h \theta|$, calculemos primero la derivada sustancial de $\nabla_h \theta$, Si por brevedad suprimimos el subíndice h , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \nabla \theta = \nabla \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \theta, \quad (1-108)$$

pues los operadores ∇ y $\partial/\partial t$ son conmutables. Por otro lado:

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta = \nabla \dot{\theta} = \nabla \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta), \quad \nabla \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \dot{\theta} - \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta),$$

pues ∇ y d/dt son también conmutables. Luego

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta = \nabla \dot{\theta} - \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) + \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \theta = \nabla \dot{\theta} - \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla \theta,$$

y resulta:

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta = \nabla \dot{\theta} - \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, \quad (1-109)$$

Para pasar a la derivada de $|\nabla\theta|$, derivemos $|\nabla\theta| |\nabla\theta| = \nabla\theta \cdot \nabla\theta$:

$$2|\nabla\theta| \frac{d}{dt} |\nabla\theta| = 2\nabla\theta \cdot \frac{d}{dt} \nabla\theta = 2\nabla\theta \cdot (\nabla\dot{\theta} - \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta) = 2\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta} - 2\nabla\theta \cdot \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta$$

luego la función frontogenética, cuando no hay calentamiento diabático, es:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} |\nabla\theta| = \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\dot{\theta} - \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta)}{|\nabla\theta|} = \frac{\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta} - \nabla\theta \cdot \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta}{|\nabla\theta|}. \quad (1-110)$$

Desarrollando el primer sumando

$$\frac{\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta}}{|\nabla\theta|} = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial z} \right), \quad (1-111)$$

cuando la propiedad θ es individualmente conservativa en el movimiento, entonces su derivada con respecto al tiempo es nula y este término es nulo. Desarrollemos el segundo sumando. El producto escalar de la diada $\nabla\mathbf{v}$ por el vector $\nabla\theta$ es otro vector y el producto escalar de este vector por el unitario $\nabla\theta/|\nabla\theta|$ es el escalar:

$$-\frac{\nabla\theta \cdot \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta}{|\nabla\theta|} = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left(\begin{array}{l} \frac{\partial\theta}{\partial x} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) \end{array} \right). \quad (1-112)$$

Para obtener la función frontogenética se puede proceder como sigue

$$\frac{d}{dt} |\nabla\theta|^2 = 2|\nabla\theta| \frac{d}{dt} |\nabla\theta| = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 \right],$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} |\nabla\theta| = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left[\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right) \right]. \quad (1-113)$$

es la función frontogenética debida al calentamiento.

La temperatura potencial es una función solo de la entropía y esta función es creciente, En efecto, consideremos dos estados A y B infinitamente próximos en un diagrama p, V (fig. 1.6). Por ser la entropía función de estado:

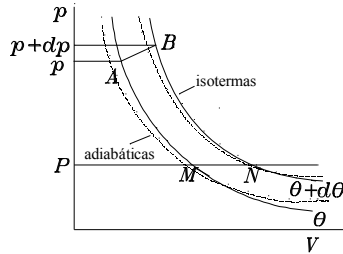


Fig. 1.6.

$$ds_{AMN} = ds_{ABN},$$

y, por recorrer adiábaticas reversibles

$$ds_{AM} = ds_{BN} = \theta.$$

Por tanto

$$ds_{AB} = ds_{MN} = \frac{\delta q_{MN}}{\theta} = c_{pa}(p, \theta) \frac{d\theta}{\theta},$$

donde c_{pa} es el calor específico del aire seco y s es la entropía específica. Esta ecuación es válida para cualquier proceso infinitesimal isobárico y cualquier medio. Y puesto que c_p y θ son positivas, es claro que si la entropía aumenta la temperatura potencial también aumenta, y recíprocamente. En otras palabras, la temperatura potencial del aire es función exclusiva de la entropía y función precisamente creciente. Utilizando la ecuación que relaciona la temperatura potencial con la temperatura,

$$ds = \frac{\delta q}{T} = c_{pa} \frac{d\theta}{\theta}, \quad (1-114)$$

válida para cualquier proceso infinitesimal isobárico. Utilizando la ecuación que relaciona la temperatura potencial con la temperatura,

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k,$$

donde, para el aire seco, $k = R_a/c_{pa}$, resulta:

$$d\theta = \frac{1}{c_{na}} \frac{\theta}{T} \delta q = \frac{1}{c_{na}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \delta q.$$

Dividiendo por dt , podemos escribir:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{c_{na}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\delta q}{dt}. \quad (1-115)$$

El factor $\delta q/dt$ se denomina *término de calentamiento o enfriamiento diatérmico*. La transformación del sistema es un proceso adiabático cuando $\delta q = 0$, se realiza sin intercambio de calor entre el sistema y los alrededores. En cambio, un *proceso diabático* se realiza cuando la transferencia de calor, $\delta q \neq 0$, se realiza a través de los límites o paredes del sistema. Por tanto, de (1-115) para un proceso diabático:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\delta q}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \dot{q} - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta. \quad (1-116)$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla \theta,$$

donde el último término es la advección térmica, que puede ser nula. La advección térmica es fría si $-\mathbf{v} \cdot \nabla \theta < 0$, cálida, cuando $-\mathbf{v} \cdot \nabla \theta > 0$. Si $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0$ no hay advección. Derivemos con respecto a las coordenadas x, y, z . Para la coordenada x , tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta,$$

y por consiguiente, procediendo de forma análoga para los tres sumandos, se tienen las derivadas sustanciales de las componentes de $\nabla \theta$ en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) &= \frac{p_0^k}{c_{pa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{q}}{p^k} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla \theta, \end{aligned} \quad (1-117)$$

y sustituyendo en la ecuación (1-113), se obtiene para la parte de la frontogénesis cuando hay calentamiento diabático:

$$F_{\delta q} = \frac{1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta \right] + \frac{\partial \theta}{\partial y} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta \right] + \dots \right) \quad (1-118)$$

y la frontogénesis total cuando la propiedad θ es no conservativa:

$$F = \frac{d}{dt} |\nabla \theta| = \frac{\nabla \theta \cdot \nabla \dot{\theta}}{|\nabla \theta|} - \frac{\nabla \theta \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta}{|\nabla \theta|} + F_{\delta q}. \quad (1-119)$$

$$F_3 = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\theta}{\partial x} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial\dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla\theta \right] - \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\dot{z}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial\dot{q}}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla\theta \right] - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\dot{z}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} \left[\frac{p_0^k}{c_{pa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{q}}{p^k} \right) - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla\theta \right] - \frac{\partial\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\dot{z}}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial z} \end{array} \right) \cdot \quad (1-120)$$

La frontogénesis total F en tres dimensiones, sin el término A , es debido a la contribución de varios procesos. La frontogénesis se puede considerar producida por las cuatro columnas siguientes de la ecuación (1-120). la primera columna son factores pesantes que afectan las tres columnas restantes, y son la razón entre las componentes del gradiente de la temperatura potencial y el módulo del gradiente.

La segunda columna consta de tres sumandos; los dos primeros sumandos, llamados términos diabáticos, se deben a la contribución del calentamiento diabático, consecuencia de la radiación solar y/o terrestre, que es una influencia física; representan la derivada con respecto a la coordenada de la variación del calor diabático por unidad de tiempo, y son los gradientes diabáticos de calor en las tres direcciones x , y , z , y son las componentes del gradiente de temperatura potencial y representan sus variaciones en las direcciones de los ejes coordenados. Por su parte el segundo término de la segunda columna

$$F_{22} = - \frac{1}{|\nabla\theta|} \left[\frac{\partial\theta}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla\theta \right) + \frac{\partial\theta}{\partial y} \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla\theta \right) + \frac{\partial\theta}{\partial z} \left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla\theta \right) \right], \quad (1-121)$$

representa la contribución a la frontogénesis debida al movimiento del aire. Es nulo si no hay advección térmica y entonces el término desaparece de la ecuación (1-120).

Los dos primeros términos de la tercera columna son términos de deformación horizontal, el tercero es de deformación vertical. Los dos primeros términos de la cuarta columna son de inclinación, el tercero es la divergencia vertical y es la contribución a la frontogénesis debido a la variación del gradiente vertical de la temperatura potencial θ por la variación de la velocidad vertical en el plano vertical.

La frontogénesis tridimensional sin el primer sumando A se puede decir que es el proceso de formación o intensificación de un sistema frontal debido a influencias físicas (por ejemplo, radiación) o cinemáticas (movimiento del aire). Los paréntesis aparecen multiplicados por tres factores, que son la razón entre las componentes del gradiente de la temperatura potencial y el módulo del gradiente.

2. APUNTES DE METEOROLOGÍA

2.1. ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DEL TORBELLINO DE HELMOLTZ

La ecuación fundamental de la fluidodinámica o movimiento de un fluido sometido a la fuerza por unidad de masa f , sin rotación ni viscosidad, es;

$$\mathbf{a} = \mathbf{f} - \tau \nabla p, \quad (2-1)$$

donde $\tau = 1/\rho$ es el volumen específico (ρ la densidad) y p la presión, se puede escribir:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2-2)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad. En el caso de que f derive de un potencial, es decir: $\mathbf{f} = -\nabla \phi$. Si ϕ es el potencial terrestre $\phi = gz$ y

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left(\phi + \frac{1}{2} v^2 \right) - \tau \nabla p, \quad (2-3)$$

que para un fluido incompresible $\tau = \text{cte}$, puede escribirse:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + p\tau + \phi \right), \quad (2-4)$$

y si suponemos un movimiento estacionario ($\mathbf{v} = \text{cte}$) e irrotacional ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), el primer miembro es constante y resulta:

$$B = p\tau + \phi + \frac{1}{2} v^2 = \text{cte}, \quad (2-5)$$

que es la ecuación de Bernoulli. Esta ecuación expresa: en el movimiento permanente de un fluido incompresible en un campo gravitatorio constante, la función B o la función

$$\frac{B}{\tau} = p + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte},$$

tiene el mismo valor en todos los puntos de una línea de corriente. El valor de la constante, en general, es distinto para de corriente diferentes.

En realidad la ecuación de Bernoulli expresa la conservación de la energía para una partícula fluida. El término $p\tau$ de (2-5) representa el trabajo realizado por unidad de masa por la fuerza del campo de presiones, gz es la energía potencial por unidad de masa y $v^2/2$ es la energía cinética por unidad de masa.

Aplicando el rotacional en (2-4), se tiene:

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} \right) = 0,$$

y por tanto, teniendo en cuenta que

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} & \nabla \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \mathbf{a} & \cdot \nabla \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}, \quad (2-6)$$

y como $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial \text{rot} \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \text{rot} \mathbf{v} \\ \text{div} \mathbf{v} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \nabla \mathbf{v} & \cdot \nabla \text{rot} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} & \text{rot} \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

Tendremos pues,

$$\frac{\partial \text{rot} \mathbf{v}}{\partial t} = \text{div} \mathbf{v} \text{ rot} \mathbf{v} + \text{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot} \mathbf{v},$$

o bien

$$\frac{d \text{rot} \mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \text{rot} \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot} \mathbf{v} = - \text{div} \mathbf{v} \text{ rot} \mathbf{v} = - \text{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

es decir:

$$\frac{d \text{rot} \mathbf{v}}{dt} + \text{div} \mathbf{v} \text{ rot} \mathbf{v} = - \text{rot} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

y recordando que para un cuerpo sólido:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{rot} \mathbf{v} = \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2 \boldsymbol{\omega}.$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de rotación. Entonces:

$$\frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \text{ div} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2-7)$$

y teniendo en cuenta que

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt},$$

se puede escribir:

$$\tau \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \frac{d\tau}{dt} = \tau \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (2-8)$$

o también:

$$\frac{d(\tau \boldsymbol{\omega})}{dt} = \tau \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2-9)$$

que es la llamada ecuación del torbellino de Helmholtz. En particular, para un fluido incompresible $\tau = \text{cte}$ y resulta:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2-10)$$

2.2.- ECUACIÓN DE LA VORTICIDAD RELATIVA

Se define la vorticidad relativa por la expresión, $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{v}$, que en el plano es:

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \zeta_z \mathbf{k}, \quad (2-11)$$

un vector que tiene la dirección del eje z. Su derivada sustancial con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}. \quad (2-12)$$

La ecuación del movimiento sin rozamiento de un fluido no viscoso en el plano es:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\tau \nabla p - \nabla \psi, \quad (2-13)$$

donde ψ es el geopotencial o potencial gravitatorio compuesto y p la presión.

En el cálculo vectorial infinitesimal se demuestra que

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = \frac{1}{2} \nabla b^2 - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}),$$

y si se hace

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

y puesto que $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{v}$, se tiene la importante relación muy útil en fluidodinámica:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}. \quad (2-14)$$

Aplicando a esta identidad el operador $\nabla \times$:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}), \quad (2-15)$$

pues $\nabla \times \nabla v^2 = 0$ (rot grad $f = 0$, f escalar).

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}.$$

La derivada local de la velocidad :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\tau} \nabla p - \nabla \psi - \frac{1}{2} \nabla v^2 + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta} = -\boldsymbol{\tau} \nabla p - \nabla \left(\psi + \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta},$$

y multiplicando vectorialmente por ∇ , puesto que $\nabla \times (\boldsymbol{\tau} \nabla p) = \boldsymbol{\tau} \nabla \times \nabla p - \nabla \boldsymbol{\tau} \times \nabla p = -\nabla \boldsymbol{\tau} \times \nabla p = \mathbf{B}$, ya que el rot grad $f = 0$ (f , escalar). Aquí $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \boldsymbol{\tau}$ es el vector baroclino. Y multiplicando por $\nabla \times$, puesto $\nabla \times \nabla f = 0$, resulta:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla p \times \nabla \boldsymbol{\tau} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}), \quad (2-16)$$

siendo $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \boldsymbol{\tau}$ el vector torbellino. Y teniendo en cuenta la (2-6)

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} & \nabla \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \mathbf{a} & \cdot \nabla \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix},$$

y poniendo $\mathbf{a} = \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\zeta}$, y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0$ (div rot $\mathbf{v} = 0$), se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta} = \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \boldsymbol{\zeta} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \mathbf{v} & \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{v} & \boldsymbol{\zeta} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{\zeta} \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \quad (2-17)$$

ya que $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0$ (div rot $\mathbf{v} = 0$), luego la variación de la vorticidad relativa $\boldsymbol{\zeta}$ con el tiempo de un elemento fluido no viscoso moviéndose sin rozamiento en el plano con el flujo, es:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \mathbf{B} - \boldsymbol{\zeta} \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}, \quad (2-18)$$

que es la variación de la vorticidad relativa $\boldsymbol{\zeta}$ con el tiempo de un elemento fluido moviéndose

en el plano con el flujo. La derivada sustancial de la vorticidad relativa de un elemento fluido moviéndose en el plano con el flujo, es:

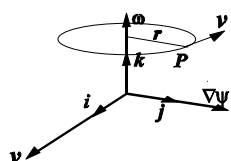
$$\frac{d\zeta}{dt} = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = \mathbf{B} - \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} + \zeta \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2-19)$$

Si suponemos un fluido barotrópico, $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \tau = 0$. También podemos suponer que se trata de un fluido de densidad constante, en cuyo caso $\nabla \tau = 0$. Si además el fluido no es compresible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ o se trata de un movimiento estacionario $\mathbf{v} = \text{cte}$. Con todo ello, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta \cdot \nabla \mathbf{v}$$

válida solo si $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \tau = 0$ y además el fluido es compresible.

2.3.- POTENCIAL CENTRIFUGO. La velocidad lineal de un sólido en rotación, como es el caso de la Tierra, si P es un punto de la Tierra que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r} el vector que une P con el eje, en el plano perpendicular al eje, la velocidad lineal del punto P es el vector: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Lo mismo que la aceleración de Coriolis o la gravitación aparente \mathbf{g} , el vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ deriva de un potencial escalar ψ que cumple:



$$\nabla \psi = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (2-20)$$

Fig. 2.1.

Este escalar se denomina potencial centrífugo. Los vectores $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ son perpendiculares entre sí, luego, los productos: $\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \psi = 0$. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está determinada por el periodo de rotación de la Tierra, con respecto a las estrellas fijas, es de 366,25 días siderales y su periodo alrededor del Sol es de 365,25 días solares. Por tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{día sideral}} = \frac{366,25}{365,24} \frac{2\pi}{\text{día solar}} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

El producto escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = 0, \quad (2-21)$$

por ser \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ perpendiculares. Por tanto también son perpendiculares \mathbf{v} y $\nabla \psi$. Salvo una constante,

$$\psi = -\frac{v^2}{2} = -\frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2}, \quad (2-22)$$

2.4.-DERIVADA SUSTANCIAL DE LA COMPONENTE NORMAL DE LA VORTICIDAD ABSOLUTA EN EL PLANO DE UNA CURVA CERRADA

Entre la velocidad absoluta y la relativa existe la relación,

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2-23)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la Tierra y \mathbf{r} el vector de posición de un punto P sobre la Tierra. De manera que el rotacional es:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2-24)$$

y teniendo en cuenta la (1-6):

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega} & \mathbf{r} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} & \nabla \cdot \mathbf{r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} & \cdot \nabla \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\omega} & \mathbf{r} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{r} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega},$$

puesto que $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ y $\nabla \mathbf{r} = \delta$, la díada unidad. Entonces se cumple que $2\boldsymbol{\omega}$ es la vorticidad de la Tierra. Por consiguiente,

$$\zeta_A = \zeta + 2\boldsymbol{\omega}, \quad (2-25)$$

de manera que la vorticidad absoluta es igual a la relativa más la vorticidad de la Tierra. La vorticidad vertical se obtiene multiplicando por $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ la vorticidad, luego como:

$$(\zeta_A)_z = \zeta_z + 2\boldsymbol{\omega}(\cos\varphi \mathbf{j} + \sin\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \zeta_z + 2\boldsymbol{\omega} \sin\varphi = \zeta_z + l, \quad (2-26)$$

de modo que el parámetro de Coriolis es:

$$2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = 2\omega_z = 2\boldsymbol{\omega} \sin\varphi = l \quad (2-27)$$

La circulación de la velocidad a lo largo de una línea cerrada, teniendo en cuenta el teorema de Stokes, para la velocidad relativa, es:

$$C = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \zeta \cdot d\mathbf{S}, \quad (2-28)$$

y análogamente para la velocidad absoluta. La derivada sustancial de la circulación de la velocidad absoluta es:

$$\frac{dC_A}{dt} = \oint \dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \nabla \cdot \dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \dot{\zeta}_A \cdot d\mathbf{S}. \quad (2-29)$$

La ecuación fundamental de la dinámica de fluidos, sin rozamiento, referida a unos

ejes $OXYZ$ centrados en la Tierra y cuyo eje z coincide con el eje terrestre, donde la fuerza por unidad de masa es $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, es:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{g} - \tau \nabla p = -\nabla \psi - \tau \nabla p, \quad (2-30)$$

luego

$$\dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{R} = -d\psi - \tau dp \quad \nabla \times \dot{\mathbf{V}} = -\nabla(\tau \nabla p) = -\nabla \tau \times \nabla p = \mathbf{B}, \quad (2-31)$$

donde $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \tau$ es el vector baroclino.

Con la primera de estas ecuaciones (2-31), la (2-29), teniendo en cuenta el teorema de Stokes, la derivada sustancial de la circulación absoluta es:

$$\frac{dC_A}{dt} = \oint \dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{R} = \oint \tau dp, \quad (2-32)$$

pues $-\oint d\psi = 0$. pero también según el teorema de Stokes:

$$\frac{dC_A}{dt} = \oint \dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \nabla \times \dot{\mathbf{V}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\tau \nabla p) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2-33)$$

que nos dice que la derivada sustancial de la circulación absoluta de una curva cerrada, constituida siempre por los mismos puntos, es igual al flujo del vector biescalar \mathbf{B} a través de cualquier superficie que lo contiene.

Utilizando la vorticidad absoluta media se puede escribir::

$$C_A = \langle \zeta_A \rangle S, \quad (2-34)$$

siendo

$$\langle \zeta_A \rangle = \frac{1}{S} \int_S \zeta_A \cdot d\mathbf{S}, \quad (2-35)$$

con lo cual

$$C_A = \langle \zeta_A \rangle S = \int_S \zeta_A \cdot d\mathbf{S}, \quad (2-36)$$

resulta la misma que (2-34). Ahora la circulación es el flujo de la vorticidad absoluta media.

Y calculando la derivada sustancial de la circulación absoluta:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{d\langle \zeta_A \rangle}{dt} S + (\zeta_A) \frac{dS}{dt}, \quad (2-37)$$

así despejando la derivada sustancial de la vorticidad vertical y dividiendo por S :

$$\frac{d\langle \zeta_A \rangle}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dC_A}{dt} - \frac{(\zeta_A)}{S} \frac{dS}{dt}. \quad (2-38)$$

En particular, cuando la curva c está en el plano horizontal, la vorticidad absoluta media es la componente vertical de la vorticidad absoluta $(\zeta_A)_z$, de manera que

$$\frac{d(\zeta_A)_z}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dC_A}{dt} - (\zeta_A)_z \frac{\dot{S}}{S}. \quad (2-39)$$

El primer término del segundo miembro según la (2-33) es el flujo del vector baroclino por unidad de superficie y la razón del segundo término es la divergencia horizontal. Por tanto

$$\frac{d(\zeta_A)_z}{dt} = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - (\zeta_A)_z \text{div}_h \mathbf{v}, \quad (2-40)$$

es decir que la derivada sustancial sustancial de la componente normal depende del flujo del vector baroclino por unidad de superficie y de la divergencia en el plano. Esta ecuación se simplifica para fluidos barotrópicos donde $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla \tau = 0$ en cada punto, que muestra que las superficies isobáricas coinciden con las superficies isosteras o que $\tau = \text{cte}$ y entonces el fluido es incompresible. Por tanto, para un fluido barotrópico e incompresible,

$$\frac{d(\zeta_A)_z}{dt} = -(\zeta_A)_z \text{div}_h \mathbf{v}, \quad (2-41)$$

que es la ecuación de Rossby para fluidos incompresibles y barotrópicos. La ecuación es válida si la curva c está sobre una superficie isobárica, isentrópica o de temperatura potencial, etc. En los lugares sin divergencia horizontal

$$\frac{d(\zeta_A)_z}{dt} = 0, \quad (\zeta_A)_z = \zeta_z + l = \text{cte}, \quad (2-42)$$

donde $l = 2\omega \sin \varphi$ es el parámetro de Coriolis. Esta ecuación establece que la componente vertical de la vorticidad absoluta permanece constante. Este es el teorema de conservación de la vorticidad vertical absoluta.

Conviene notar que las suposiciones introducidas para obtener esta ecuación requieren un modelo de atmósfera muy simple, pues, admitir que la atmósfera es incompresible

es tanto como excluir la posibilidad de propagación de las ondas sonoras que, por su misma naturaleza, son oscilaciones longitudinales y cuya existencia depende de la compresibilidad del medio. Y debido a que los movimientos de las partículas son horizontales el modelo de atmósfera tampoco puede propagar las ondas gravitatorias, que son oscilaciones transversales.

Si una corriente de aire aumenta (disminuye) la vorticidad de la Tierra en la dirección vertical, que es $l = 2\omega$, para lo que debe aumentar la latitud en el hemisferio N (S), tiene que disminuir (aumentar) la componente vertical de la vorticidad relativa. Por el contrario, si en el hemisferio N (S) la corriente de aire disminuye (aumenta) la latitud, debe aumentar (disminuir) la vorticidad relativa vertical.

2.5.- VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD DEL MÓDULO DEL GRADIENTE DE TEMPERATURA

El gradiente de una función escalar es la variación de la función en un punto de su campo de existencia. Para obtener la derivada sustancial del gradiente de temperatura vamos a desarrollar el segundo miembro usando la relación general para una función f cualquiera:

$$\frac{d}{dt} f^n = n f^{n-1} \frac{df}{dt}, \quad (2-43)$$

entonces, poniendo

$$f = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2} = |\nabla_h T|^{1/2}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad (2-44)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\nabla_h T| &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right]^{(1/2-1)} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\nabla_h T|} \left(2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \frac{\partial T}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{|\nabla_h T|} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2-45)$$

es decir:

$$\frac{d}{dt} |\nabla_p T| = \frac{1}{|\nabla_h T|} \left(\nabla_h T \cdot \frac{d}{dt} \nabla_h T \right). \quad (2-46)$$

Esta ecuación nos hace ver que derivada sustancial cuasi-geostrófica del módulo del gradiente de temperatura isobárico depende de temperatura horizontal ∇T y del gradiente de temperatura horizontal ∇T y la orientación de los vectores. A este respecto hay que recordar que el producto escalar de dos vectores es positivo si el ángulo que forman es $< 90^\circ$, negativo si el ángulo es $> 90^\circ$. Es nulo si los vectores son perpendiculares. Volveremos en 3.7 y 3.8 a

tratar este tema.

2.6.- LA DIVERGENCIA EN COORDENADAS ISOBÁRICAS

Mientras en los movimientos atmosféricos en gran escala la divergencia y la velocidad vertical son muy pequeños, en muchos problemas relacionados con la predicción la divergencia y la velocidad vertical tienen gran importancia. En coordenadas isobáricas o coordenadas p son (x, y, p, t) en el que el plano (x, y) se toma tangente a la superficie isobárica del lugar (x hacia el este, y hacia el norte), siendo el eje de p normal a la superficie isobárica y dirigido hacia abajo, que es el de las presiones crecientes.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad \text{div}_p \mathbf{v} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (2-47)$$

donde ω juega el papel de v_z en coordenadas cartesianas. La divergencia controla gran parte de la formación de ciclones y anticiclones y su intensidad, la velocidad vertical determina enfriamientos y calentamientos adiabáticos responsables de la condensación y evaporación y, por consiguiente, de la formación de hidrometeoros.

La ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas (x, y, p) de Sutcliffe y Godart, se obtiene utilizando $\delta m = \rho \delta V = \rho \delta x \delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta p / g$ y

$$\frac{d}{dt}(\ln \delta m) = \frac{1}{\delta m} \frac{d}{dt}(\ln \delta m) = \frac{g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x \partial y \partial p}{g} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0,$$

y haciendo tender δx , δy , δp a cero, resulta

$$\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2-48)$$

donde $\omega = dp/dt$. Esta ecuación relaciona la $\text{div}_p \mathbf{v}$ con la variación de la velocidad de la presión con respecto a la presión. Si se conoce la distribución vertical de la divergencia en la columna es posible determinar el movimiento vertical. Multiplicando (2-48) por dp e integrando entre p y 0 resulta:

$$\omega = - \int_p^0 \text{div}_p \mathbf{v} dp = \int_0^p \text{div}_p \mathbf{v} dp. \quad (2-49)$$

que es el valor que toma ω en el nivel p , pues corresponde al valor de la integral desde el nivel $p = 0$, límite superior de la atmósfera, y el nivel p de referencia. Según esta ecuación, la velocidad ω , normal a la superficie isobárica, depende de la divergencia isobárica de la velocidad del viento en niveles por encima del nivel de referencia. Por lo que hay que concluir que los valores de la presión en el suelo o el valor de la tendencia barométrica dependen de

la divergencia isobárica en todos los niveles del aire, encima de nivel de referencia. En consecuencia, son estos procesos los que rigen los movimientos del aire y las variaciones de presión, así como la tendencia barométrica en el nivel p .

Las ecuaciones del movimiento en el plano isobárico se pueden escribir así:

$$\left(\frac{dv_x}{dt}\right)_p = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_p + l\dot{y}, \quad \left(\frac{dv_y}{dt}\right)_p = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_p - l\dot{x}. \quad (2-50)$$

Derivando la primera respecto a y y la segunda respecto a x , se tiene:

$$\left(\frac{\partial\dot{v}_x}{\partial y}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial(l\dot{y})}{\partial y}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial\dot{v}_y}{\partial x}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_p - \left(\frac{\partial(l\dot{x})}{\partial x}\right)_p$$

y restando la primera a la segunda, resulta:

$$\left(\frac{\partial\dot{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{v}_x}{\partial y}\right)_p = -\left(\frac{\partial(l\dot{x})}{\partial x} + \frac{\partial(l\dot{y})}{\partial y}\right)_p = -\frac{dl}{dy} - l \operatorname{div}_p \mathbf{v}, \quad (2-51)$$

puesto que $\partial l / \partial x = 0$, ya que l solo varía a lo largo del meridiano y $\partial l / \partial y = dl / dy$. Entonces, dividiendo por l :

$$\operatorname{div}_p \mathbf{v} = -\frac{1}{l} \left(\frac{\partial\dot{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{v}_x}{\partial y}\right)_p - \frac{1}{l} \frac{dl}{dy}. \quad (2-52)$$

Según esto, la divergencia isobárica del viento real depende de las derivadas locales de las componentes a_x y a_y de la aceleración en la superficie isobárica según x e y . Y como de acuerdo con la ecuación (2-52) la divergencia está relacionada con movimientos verticales, resulta que el problema de la predicción está relacionada con las aceleraciones en las superficies isobáricas.

La vorticidad isobárica relativa, por definición, si \mathbf{u}_p es el vector unitario en la dirección de la tercera coordenada p , es:

$$\zeta_p = \mathbf{u}_p \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot}_p \mathbf{v} = \left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\right) \mathbf{u}_p, \quad (2-53)$$

es la componente del rotacional de la velocidad en la dirección de la coordenada p . La derivada sustancial de la vorticidad relativa es,

$$\frac{d\zeta_p}{dt} = \frac{d}{dt} \text{rot}_p \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_p \cdot \text{rot } \mathbf{v}) = \mathbf{u}_p \cdot \frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v}. \quad (2-54)$$

Vamos a desarrollar la última derivada y multiplicar escalarmente por \mathbf{u}_p . Como:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\text{rot } \mathbf{v})_p, \quad (2-55)$$

pero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \nabla v^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v},$$

luego la (2-55)

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \dot{\mathbf{v}} + \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) + \text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla (\text{rot } \mathbf{v})_p, \quad (2-56)$$

y siendo el desarrollo:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad (2-57)$$

se puede escribir:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2-58)$$

donde $\mathbf{v} \nabla \cdot \text{rot } \mathbf{v} = 0$ pues es la divergencia del rotacional. Por consiguiente:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \dot{\mathbf{v}} - \text{rot } \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \text{rot } \mathbf{v}, \quad (2-59)$$

y finalmente:

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \dot{\mathbf{v}} - \text{rot } \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2-60)$$

Multiplicar escalarmente por \mathbf{u}_p :

$$\mathbf{u}_p \cdot \frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{u}_p \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{u}_p \cdot (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \mathbf{u}_p \cdot (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}). \quad (2-61)$$

El primer miembro es $d\zeta_p/dt = d(\text{rot}_p \mathbf{v})/dt$. En el segundo miembro:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}} &= \text{rot}_p \dot{\mathbf{v}}, \\ -\mathbf{u}_p \cdot (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\text{rot}_p \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{v}, \\ \mathbf{u}_p \cdot (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \text{rot}_p \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \end{aligned}$$

luego:

$$\frac{d\zeta_p}{dt} = \text{rot}_p \dot{\mathbf{v}} - \text{rot}_p \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \text{rot}_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}. \quad (2-62)$$

La aceleración en coordenadas isobáricas,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p}. \quad (2-63)$$

se tiene así el importante operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_p \text{ div}_p + \omega \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2-64)$$

designando con $\mathbf{v}_p = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, la velocidad en la superficie isobara. Operador que aplicado a la vorticidad isobárica relativa, resulta:

$$\frac{d\zeta_p}{dt} = \frac{\partial \zeta_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \text{ div}_p \zeta_p + \omega \frac{\partial \zeta_p}{\partial p}, \quad (2-65)$$

se desprecia el pequeño término debido al gradiente de vorticidad, se tiene:

$$\frac{d(\zeta_A)_p}{dt} = \frac{\partial (\zeta_A)_p}{\partial t} = -(\zeta_A)_p \text{ div}_p \mathbf{v}, \quad (2-66)$$

la vorticidad vertical se conserva siguiendo el movimiento: $(\zeta_A)_z = \text{cte}$. Y si en algún nivel la divergencia es nula la vorticidad vertical será máxima en valor absoluto.

2.7.- LA FUNCIÓN FRONTOGENÉTICA EN EL PLANO SIN CALENTAMIENTO DIABÁTICO

Al estudiar la función frontogenética, obtuvimos la ecuación (1-109),

$$\frac{d}{dt} \nabla \theta = \nabla \dot{\theta} - \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta, \quad (2-67)$$

donde

$$\nabla\dot{\theta} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \dot{\theta} = \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (2-68)$$

y para obtener la función frontogenética, utilizamos

$$2|\nabla\theta| \frac{d}{dt} |\nabla\theta| = 2\nabla\theta \cdot \frac{d}{dt} \nabla\theta = 2\nabla\theta \cdot (\nabla\dot{\theta} - \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta) = 2\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta} - 2\nabla\theta \cdot \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta$$

de donde resulta:

$$F = \frac{d}{dt} |\nabla\theta| = \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\dot{\theta} - \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta)}{|\nabla\theta|} = \frac{\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta} - \nabla\theta \cdot (\nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta)}{|\nabla\theta|}, \quad (2-69)$$

la función frontogenética. Desarrollemos el primer sumando en dos dimensiones, se tiene:

$$\frac{\nabla\theta \cdot \nabla\dot{\theta}}{|\nabla\theta|} = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y} \right) = A \quad (2-70)$$

cuando la propiedad θ es individualmente conservativa en el movimiento, entonces su derivada con respecto al tiempo es nula y este término es nulo.

El segundo sumando es el producto escalar de la díada $\nabla\mathbf{v}$ por el vector $\nabla\theta$ es otro vector y el producto escalar de este vector por $\nabla\theta$ es:

$$-\frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta)}{|\nabla\theta|} = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \right) + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2-71)$$

así que la función frontogenética es:

$$\frac{d}{dt} |\nabla\theta| = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left\{ \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \right) \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right\}. \quad (2-72)$$

Recordemos que se definen las funciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} &= 2b \quad (\text{divergencia}), & \zeta_z &= \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} = 2a \quad (\text{vorticidad}), \\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} &= 2c \quad (\text{dilatación}), & \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} &= 2h \quad (\text{cizalladura}), \end{aligned} \quad (2-73)$$

donde aparecen los campos de deformación: rotación $2a$, divergencia $2b$, dilatación $2c$ y cizalladura $2h$. La diferencia $(b - c)$, expresa los efectos de la confluencia y difluencia. De ellas resultan las derivadas:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = (b + c), \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = (b - c), \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = (h - a), \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = (a + h), \quad (2-74)$$

entonces la (2-72), si el termino A (2-70) es nulo y no hay calentamiento diabático, ($\delta q = 0$):

$$F = -\frac{b}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{|\nabla\theta|} \left[c \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - c \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 + 2h \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right], \quad (2-75)$$

y poniendo

$$A = \frac{1}{|\nabla\theta|} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial\dot{\theta}}{\partial y} \right), \quad B = -\frac{b}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] = -b|\nabla\theta| \quad (2-76)$$

$$C = -\frac{c}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{2h}{|\nabla\theta|} \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y},$$

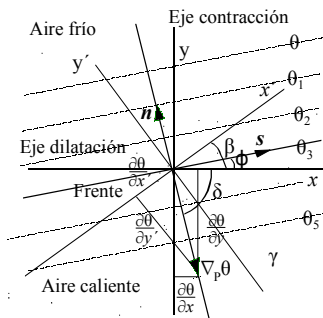


Fig. 2.2. Hemisferio N.

donde $A = 0$, se puede escribir la (2-75) en la forma:

$$\frac{d}{dt} |\nabla_h \theta| = B + C, \quad (2-77)$$

Vamos a referir estas ecuaciones al ángulo ϕ que forman las isolíneas de temperatura potencial con el eje de las x (fig. 2.2), y sea δ el ángulo que forma el $\nabla\theta$ con el eje de las x cuyo sentido es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial. Sea $\mathbf{u} = -\mathbf{n}$ es el vector unitario de $\nabla\theta$. Entonces (fig. 2.2), se tiene:

$$\theta_x = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad (2-78)$$

luego:

$$\theta_x = \frac{\partial\theta}{\partial x} = |\nabla\theta| \cos\delta, \quad \theta_y = \frac{\partial\theta}{\partial y} = -|\nabla\theta| \sin\delta, \quad (2-79)$$

así que

$$C = \frac{-c}{|\nabla\theta|} (\theta_x^2 - \theta_y^2) = -2c |\nabla\theta| (\sin^2\delta - \cos^2\delta) = c |\nabla\theta| \cos 2\delta,$$

y por consiguiente:

$$F_h = C + B = |\nabla\theta| (c \cos^2 \delta - b), \quad (2-80)$$

que muestra que la frontogénesis depende de los campos de dilatación $2c$ y divergencia $2b$.

2.8.- GIRO DEL SISTEMA DE COORDENADAS x, y UN ÁNGULO β

Vamos a ver ahora qué sucede si hacemos un giro de ángulo β , de las coordenadas (x, y) a las (x', y') . Para esto, desarrollemos las funciones

$$\dot{x} = \dot{x}(x, y), \quad \dot{y} = \dot{y}(x, y), \quad (2-81)$$

en serie de Taylor, y tenemos en cuenta solo el primer término:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right) x + \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) y, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 + \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right) x + \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right) y,$$

teniendo en cuenta que, según (2-74)

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = b + c, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = b - c, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = h - a, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = a + h,$$

las ecuaciones (2-81) se pueden escribir en la forma:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + (b + c)x + (h - a)y, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 + (h + a)x + (b - c)y, \quad (2-82)$$

de manera que, haciendo girar en el plano el sistema de coordenadas (x, y) a (x', y') un ángulo arbitrario β alrededor del eje z (fig.2.1), los coeficientes b y a son independientes de la rotación, mientras que c y h dependen de la elección del sistema. Eligiendo un ángulo β tal que $a = b = 0$, las velocidades relativas en los dos sistemas de coordenadas están dadas por:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_0 = cx + hy, & \delta \dot{y} &= \dot{y} - \dot{y}_0 = hx - cy, \\ \delta \dot{x}' &= \dot{x}' - \dot{x}'_0 = c'x' + h'y', & \delta \dot{y}' &= \dot{y}' - \dot{y}'_0 = h'x' - c'y', \end{aligned} \quad (2-83)$$

y las ecuaciones de transformación de estas velocidades relativas están dadas por las expresiones:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}' \\ \delta \dot{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \dot{x}' \\ \delta \dot{y}' \end{pmatrix}, \quad (2-84)$$

y de forma similar para cualquier otro vector, como las coordenadas.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2-85)$$

De la segunda (2-85) se obtiene

$$x = x' \cos \beta - y' \sin \beta, \quad y = x' \sin \beta + y' \cos \beta,$$

y de las primeras ecuaciones de (2-83) se convierten

$$\delta x' = c(x' \cos \beta - y' \sin \beta) + h(x' \sin \beta + y' \cos \beta),$$

$$\delta y' = h(x' \cos \beta + y' \sin \beta) - c(x' \sin \beta + y' \cos \beta),$$

que teniendo en cuenta la segunda de (2-82), resulta::

$$\cos \beta \delta x' - \sin \beta \delta y' = c(x' \cos \beta - y' \sin \beta) + h(x' \sin \beta + y' \cos \beta),$$

$$\sin \beta \delta x' + \cos \beta \delta y' = h(x' \cos \beta + y' \sin \beta) - c(x' \sin \beta + y' \cos \beta),$$

de manera que multiplicando estas ecuaciones por $\cos \beta$ y $\sin \beta$, respectivamente,

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta \delta x' - \sin \beta \cos \beta \delta y' &= c x' \cos^2 \beta - c y' \sin \beta \cos \beta, \\ &\quad + h x' \sin \beta \cos \beta + h y' \cos^2 \beta, \\ \sin^2 \beta \delta x' + \sin \beta \cos \beta \delta y' &= h x' \sin \beta \cos \beta - h y' \sin^2 \beta, \\ &\quad - c x' \sin^2 \beta - c y' \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (2-85a)$$

y teniendo en cuenta que

$$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta, \quad 2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta, \quad (2-86)$$

y sumando las (2-85a)

$$\begin{aligned} \delta x' &= c(x' \cos 2\beta - y' \sin 2\beta) + h(x' \sin 2\beta + y' \cos 2\beta), \\ &= (c \cos 2\beta + h \sin 2\beta)x' + (c \sin 2\beta - h \cos 2\beta)y' \end{aligned} \quad (2-87)$$

y comparando estas ecuaciones con la segunda de (2-83), resultan las siguientes ecuaciones:

$$c' = c \cos 2\beta + h \sin 2\beta, \quad h' = h \cos 2\beta - c \sin 2\beta. \quad (2-88)$$

Si en lugar de multiplicar por $\cos \beta$ y $\cos \beta$ multiplicamos por $\sin \beta$ y $\cos \beta$ las ecuaciones (2-85), después de restar, se llega a

$$-\delta y' = c x' \sin 2\beta + h y' \sin 2\beta - h x' \cos 2\beta + c y' \cos 2\beta,$$

y cambiando el signo y agrupando, resulta:

$$\delta y' = x'(-c \operatorname{sen} 2\beta + h \operatorname{cos} 2\beta) - y'(h \operatorname{sen} 2\beta + c \operatorname{cos} 2\beta),$$

y comparando con (2-83), nos da:

$$h' = -c \operatorname{sen} 2\beta + h \operatorname{cos} 2\beta, \quad c' = c \operatorname{cos} 2\beta + h \operatorname{sen} 2\beta, \quad (2-89)$$

sistema que es el mismo que (2-88). Elevando al cuadrado y sumando, suponiendo $h' = 0$ (no hay vorticidad), resulta

$$c' = \sqrt{c^2 + h^2}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{cos} 2\beta}, \quad (2-90)$$

así que el ángulo de rotación β desde x al eje de dilatación x' a lo largo del cual hay deformación por dilatación c' .

¿Cómo se transforma C después del giro? La relación entre las derivadas de θ con respecto a x e y con las θ' son: .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \operatorname{cos} \beta \frac{\partial \theta'}{\partial x} - \operatorname{sen} \beta \frac{\partial \theta'}{\partial y}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \operatorname{sen} \beta \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \operatorname{cos} \beta \frac{\partial \theta'}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2-91)$$

Para abreviar la escritura, pongamos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_x, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta_y, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial x} = \theta'_x, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial y} = \theta'_y, \quad (2-92)$$

con lo cual la (2-91) es ahora

$$\begin{aligned} \theta_x &= \operatorname{cos} \beta \theta'_x - \operatorname{sen} \beta \theta'_y, \\ \theta_y &= \operatorname{sen} \beta \theta'_x + \operatorname{cos} \beta \theta'_y, \end{aligned} \quad (2-93)$$

luego

$$\begin{aligned} \theta_x \theta_y &= (\operatorname{cos} \beta \theta'_x - \operatorname{sen} \beta \theta'_y) (\operatorname{sen} \beta \theta'_x + \operatorname{cos} \beta \theta'_y) \\ &= \operatorname{cos} 2\beta \theta'_x \theta'_y + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2). \end{aligned} \quad (2-94)$$

De la expresión de C dada por(2-76):

$$C = \frac{-1}{|\nabla \theta|} c (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) + \frac{2h}{|\nabla \theta|} \theta_x \theta_y,$$

y como

$$\begin{aligned}\theta_x^2 &= \cos^2 \beta \theta_x'^2 + \sin^2 \beta \theta_y'^2 - 2 \sin \beta \cos \beta \theta_x' \theta_y', \\ \theta_y^2 &= \cos^2 \beta \theta_y'^2 + \sin^2 \beta \theta_x'^2 + 2 \sin \beta \cos \beta \theta_x' \theta_y', \\ \theta_x^2 - \theta_y^2 &= \cos 2\beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) - 4 \sin \beta \cos \beta \theta_x' \theta_y',\end{aligned}\quad (2-94)$$

y también

$$\begin{aligned}2h \theta_x \theta_y &= 2h (\cos \beta \theta_x' - \sin \beta \theta_y') (\sin \beta \theta_x' + \cos \beta \theta_y') \\ &= 2h [\cos 2\beta \theta_x' \theta_y' + \sin \beta \cos \beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2)],\end{aligned}\quad (2-95)$$

entonces de la expresión de C dada por (2-76):

$$\begin{aligned}C &= \frac{-1}{|\nabla\theta|} [c(\theta_x^2 - \theta_y^2) + 2h \theta_x \theta_y] = \frac{-1}{|\nabla\theta|} (c \cos 2\beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) - 2c \sin 2\beta \theta_x' \theta_y') \\ &\quad \frac{-1}{|\nabla\theta|} [-2h \cos 2\beta \theta_x' \theta_y' + h \sin 2\beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2)],\end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}C &= \frac{-1}{|\nabla\theta|} [(c \cos 2\beta + h \sin 2\beta) (\theta_x'^2 - \theta_y'^2)] \\ &\quad \frac{-2}{|\nabla\theta|} [-c \sin 2\beta \theta_x' \theta_y' + h \cos 2\beta \theta_x' \theta_y'],\end{aligned}\quad (2-96)$$

o sea

$$C = \frac{-1}{|\nabla\theta|} [(c \cos 2\beta + h \sin 2\beta) (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) + 2(c \sin 2\beta - h \cos 2\beta) \theta_x' \theta_y'],$$

Si ahora tenemos en cuenta que, según (2-89):

$$c' = c \cos 2\beta + h \sin 2\beta, \quad h' = c \sin 2\beta - h \cos 2\beta = 0,$$

resulta que el primer paréntesis es c' y el segundo es nulo, por lo que

$$C = \frac{-c'}{|\nabla\theta|} (\theta_x'^2 - \theta_y'^2). \quad (2-97)$$

Con objeto de obtener la función frontogénica en función del ángulo β girado por los ejes (x, y) para situarse en (x', y') , hagamos ahora la transformación $(x', y') \rightarrow (s, n)$, donde s es el vector unitario en la dirección de las temperaturas potenciales, y sentido $-\nabla\theta$ y n es el vector unitario normal, girado 90° en sentido positivo. Si γ es el ángulo que forma x'

con $\nabla\theta$ (fig.2.3), se cumple que

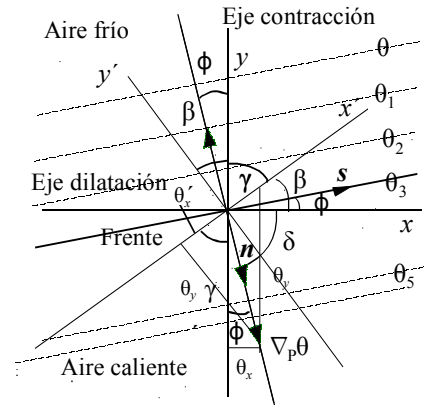


Fig. 2.3. Hemisferio N.

entonces como $\gamma + \beta = \pi/2$, según (2-97):

$$C = \frac{-c'}{|\nabla\theta|} (\theta_x^2 - \theta_y^2) = -c' |\nabla\theta| \cos 2\gamma = -c' |\nabla\theta| \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \quad (2-100)$$

se tiene:

$$C = -c' |\nabla\theta| \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -c' |\nabla\theta| \cos(\pi - 2\beta) = c' |\nabla\theta| \cos 2\beta. \quad (2-100)$$

pues $-\cos(\pi - 2\beta) = -(\cos \pi \cos 2\beta - \sin \pi \sin 2\beta) = -(-\cos 2\beta) = \cos 2\beta$.

La función frontogenética, que produce la frontogénesis, se obtiene sumando a C el término $B = -b |\nabla\theta|$:

$$F_h = c' |\nabla\theta| \cos 2\beta - b |\nabla\theta| = |\nabla\theta| (c' \cos 2\beta - b). \quad (2-101)$$

También podemos escribir:

$$F_h = \frac{1}{2} |\nabla\theta| (2c' \cos 2\beta - 2b), \quad (2-102)$$

función de $2c$ y $2b$, deformación por dilatación y divergencia.

$$\theta_x' = |\nabla\theta| \cos \gamma,$$

$$\theta_y' = |\nabla\theta| \sin \gamma,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \theta_x'^2 &= |\nabla\theta|^2 \cos^2 \gamma, \\ \theta_y'^2 &= |\nabla\theta|^2 \sin^2 \gamma, \end{aligned} \quad (2-98)$$

y como

$$\begin{aligned} \theta_x'^2 - \theta_y'^2 &= |\nabla\theta|^2 \cos^2 \gamma \\ -|\nabla\theta|^2 \sin^2 \gamma &= |\nabla\theta|^2 \cos 2\gamma, \end{aligned} \quad (2-99)$$

3. APUNTES DE METEOROLOGÍA

3.1.- CRITERIOS DE ESTABILIDAD

Consideremos una burbuja de aire en el estado p, T , que sube en el seno de la atmósfera, cuyo estado en cada estrato está definido por p', T' . La burbuja de aire al subir se encuentra con capas de aire sometidas a presiones cada vez menores. Al entrar en equilibrio con ellas, $p = p'$, se dilata, trabaja y, en general se enfría de manera que según el primer principio de la termodinámica para una transformación reversible:

$$\delta q = c_{pa} dT - \tau dp.$$

donde c_{pa} es el calor específico del aire seco. Para una transformación adiabática de un fluido donde $\delta q = 0$, la variación de temperatura con el tiempo es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\tau}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Si el movimiento del fluido es estacionario \mathbf{v} no depende de t , luego para un movimiento vertical en un campo estacionario la variación de la temperatura con el tiempo es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\tau}{c_p} \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\tau}{c_p} v_z \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\tau}{c_p} \mathbf{v} \cdot \nabla p. \quad (3-1)$$

Si la transformación no es adiabática la variación sustancial de temperatura es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} + \frac{\tau}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\tau}{c_p} \nabla p, \quad (3-2)$$

de manera que la variación local o variación en un punto fijo es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} + \frac{\tau}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\tau}{c_p} \nabla p - \nabla T \right), \quad (3-3)$$

y son debidas: al calor diabático, a la variación adiabática local de la presión y a la variación horizontal o advección de las partículas, respectivamente. El término de advección puede ponerse en forma más simple utilizando la temperatura potencial, derivando logarítmicamente

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k, \quad (3-4)$$

donde k es R/c_p y $p_0 = 1000$ mb, un nivel de referencia. Se tiene:

$$\frac{\nabla\theta}{\theta} = \frac{\nabla T}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{\nabla p}{p},$$

Por tanto, la advección es:

$$\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\tau}{c_p} \nabla p - \nabla T \right) = \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\tau}{c_p} \nabla p - \frac{T \Delta \theta}{\theta} - \frac{\tau}{c_p} \nabla p \right) = - \frac{T}{\theta} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta,$$

luego la ecuación (3-3) se puede escribir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \frac{\delta q}{\delta t} + \frac{\tau}{c_p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{T}{\theta} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta. \quad (3-5)$$

Se deduce de aquí que el movimiento del aire produce una elevación local de temperatura cuando pasa de una región a otra de temperatura potencial θ más elevada y una disminución cuando viene de una región de temperatura potencial más fría. En movimientos horizontales se puede admitir la siguiente regla: Cuando el viento pasa de una región cálida su temperatura se eleva, y se enfría cuando viene de una región fría.

Según el primer principio si la elevación de la burbuja es adiabática y teniendo en cuenta la ecuación de la estática de los fluidos $dp = -\rho' g dz$ al medio exterior:

$$c_{pa} dT = \tau dp = -\tau \rho g dz = -g dz. \quad (3-6)$$

donde se ha supuesto que la densidad del aire que sube ρ es igual a la del ambiente ρ' , pues la ecuación de la estática hay que aplicarla al ambiente. El valor que toma

$$-\left(\frac{dT}{dz} \right)_{\delta q=0} = \frac{g}{c_{pa}} = \gamma, \quad (3-7)$$

coeficiente que recibe el nombre de gradiente adiabático del aire seco. Hechos los cálculos el coeficiente γ que no depende del estado del aire vale

$$\gamma = \frac{g}{c_{pa}} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{1005 \text{ J/kg.K}} = \frac{1}{102} \text{ K/m},$$

resulta igual a un grado de enfriamiento por cada 102 metros de elevación. Este coeficiente juega un importante papel en los movimientos y estabilidad del aire.

Según la ecuación (3-3) en un movimiento adiabático y en un campo de presión estacionario también se cumple:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\delta q=0} = \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\tau}{c_p} \nabla p - \nabla T\right) = v_z \left(\frac{\tau}{c_p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad (3-8)$$

y teniendo en cuenta la ecuación de la estática de los fluidos: $p\tau = RT$ y la ecuación general de los gases, $\partial p/\partial z = -\rho g$, se tiene:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\delta q=0} = -v_z \left(\frac{g}{c_p} + \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad (3-9)$$

donde suponiendo poniendo $\rho = \rho'$, resulta $T = T'$, de manera que poniendo

$$\alpha = -\frac{\partial T'}{\partial z}, \quad (3-10)$$

que se denomina enfriamiento geométrico o gradiente vertical de temperatura para distinguirla del enfriamiento individual sustancial (dT/dt), que permite comparar las temperaturas de dos masas de aire que están en la misma vertical y distan dz . Sustituyendo en (3-9), resulta:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\delta q=0} = -v_z (\gamma - \alpha), \quad (3-11)$$

Si suponemos que la partícula de aire sube ($v_z > 0$) habrá estabilidad en la atmósfera si $\partial T/\partial t < 0$, de modo que debe ser $\gamma > \alpha$. La inestabilidad tendrá lugar si ($\partial T/\partial t > 0$) en cuyo caso será $\gamma < \alpha$.

Sea $T_0' = T_0$ la temperatura de una burbuja de aire que se encuentra en equilibrio térmico con el ambiente. Si la burbuja sube, a la altura δz la temperatura de la burbuja y el aire exterior serán, respectivamente,

$$T = T_0 - \gamma \delta z, \quad T' = T_0 - \alpha \delta z, \quad (3-12)$$

luego la diferencia de temperaturas debida al ascenso será:

$$T' - T = (\gamma - \alpha) \delta z, \quad (3-13)$$

de donde se deduce que si $\gamma > \alpha$ entonces $T' - T$ es del mismo signo que δz , así que si la burbuja de aire sube, $\delta z > 0$, la temperatura T' del aire es mayor que la temperatura de la burbuja T y al encontrarse con aire más caliente, y menos denso que ella, tenderá a bajar de nuevo; y si baja se encontrará con aire más frío y denso y tenderá a subir. A esta tendencia que tiene la burbuja a regresar al nivel de partida cuando $\gamma > \alpha$ se denomina estabilidad de la estratificación.

Cuando $\gamma < \alpha$ entonces $T' - T$ y δz son de signo contrario, así que si la burbuja sube se encontrará con aire más frío y denso y tenderá a seguir subiendo y si baja tenderá a seguir bajando. En este caso se dice que la estratificación es inestable.

Por último, si $\gamma = \alpha$ también $T' = T$; la burbuja se encuentra en el nuevo nivel a la temperatura del aire y no tiende a bajar ni subir. Se dice que hay estratificación indiferente.

En el caso de que la densidad y temperatura del aire que sube sea distinta de la del aire, la formula (3-6) en virtud de la igualdad de presiones nos dará:

$$c_{pa} dT = -\tau \rho' g dz = -g \frac{\tau}{T'} dz = -g \frac{T}{T'} dz, \quad (3-14)$$

de modo que

$$\gamma' = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_{pa}} \frac{T}{T'} = \gamma \frac{T}{T'}, \quad (3-15)$$

así que este coeficiente de enfriamiento depende de la relación entre la temperaturas de la masa que sube y la del aire, lo cual solo se produce espontáneamente cuando la temperatura del aire es menor que la del ambiente, $T < T'$.

3.2.- TEORÍA MATEMÁTICA DE LA FRONTOGÉNESIS Y FRONTOLISIS

La frontogénesis, o la formación de un frente, se pueden considerar como el fortalecimiento del gradiente de temperatura potencial. La frontólisis es el debilitamiento de un frente, que puede ser considerado como el debilitamiento del gradiente de temperatura potencial transversal delantero. Frontogénesis y frontólisis pueden definirse mediante el uso de lo que se conoce como función frontogenética. La función frontogenetica nos dice cómo varía el módulo del gradiente de la temperatura potencial horizontal en el plano isobárico con el tiempo, es decir,

$$F = \frac{d}{dt} |\nabla_p \theta|. \quad (3-16)$$

Los valores positivos de F indican que el modulo del gradiente de temperatura potencial horizontal está aumentando con el tiempo o que el frente existente se está fortaleciendo, pero no significan necesariamente que se formará un frente ; por el contrario, los valores negativos de F denotan que la temperatura potencial horizontal se está debilitando, no significa que un frente existente se disipará. La función frontogenética si proporciona una construcción para evaluar la evolución frontal, siguiendo el movimiento del frente.

Como primera aproximación, consideremos un frente recto. Definamos unos ejes locales con el eje x paralelo a las isolinéas isoentrópicas de temperatura potencial constante con

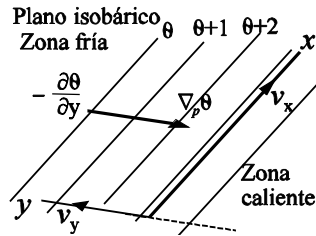


Fig. 3.1.

aire caliente situado 90° a la derecha del eje x positivo. El eje y es, perpendicular a las isobáricos, girado 90° en sentido positivo, apuntando hacia el aire frío. La componente v_x del viento es la que se encuentra a lo largo del eje x que definimos, mientras que el componente v_y del viento es la que se encuentra a lo largo del eje y que definimos. Se debe notar que tanto los ejes de coordenadas, y por lo tanto los componentes del viento aquí definidas, a menudo, no se corresponden con las direcciones cardinales (es decir, eje x positivo al este, y eje y positivo al norte).

Frontogénesis en dos dimensiones

En el plano isobárico ($\nabla = \nabla_p$) donde es conveniente el uso de coordenadas naturales (s, n), definidas por la orientación local de las isentrópicos en el plano horizontal tal que n es el unitario normal a la isentrópica hacia el lado caliente y s esta girado 90° de en sentido horario de n y es unitario tangente a una isentrópica (o de temperatura potencial constante).

En el hemisferio N el aire frío está al N y el cálido al S, el sentido de $\nabla_p\theta$, que es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial, y sentido contrario a n . En el plano isobárico escribimos, con subíndice p , el vector frontogénético:

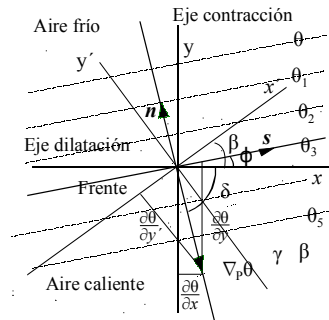


Fig. 3.2.

$$F_p = F_n n + F_s s \quad n = - \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|}, \quad (3-17)$$

donde F_n se conoce como la frontogénesis escalar y F_s como la frontogénesis de rotación, así que el vector frontogénético es:

$$F_p = \frac{d\nabla\theta}{dt} = \left(n \cdot \frac{d\nabla\theta}{dt} \right) n + \left(s \cdot \frac{d\nabla\theta}{dt} \right) s, \quad (3-18)$$

siendo ahora sus componentes normal y en la dirección de las isentrópicos:

$$F_n = n \cdot \frac{d\nabla\theta}{dt}, \quad F_s = n \times k \cdot \frac{d\nabla\theta}{dt} = k \times \frac{d\nabla\theta}{dt} \cdot n. \quad (3-19)$$

El sistema de coordenadas cartesiano se puede utilizar de tal manera que el eje x se encuentra a lo largo del eje de dilatación o el eje de contracción. El eje de dilatación y el eje de la contracción se representan a continuación gráficamente en la fig. 3.2. para un flujo de deformación pura. Si el eje x se encuentran a lo largo del eje de la dilatación, el eje y a lo largo del eje de contracción, y como $\nabla\theta$ en función de x e y esta dado por

$$\nabla\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \mathbf{j} \right),$$

el producto

$$\nabla\theta \cdot \frac{d\nabla\theta}{dt} = \nabla\theta \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial y},$$

$$F_n = \frac{-1}{|\nabla_p\theta|} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right), \quad F_s = \frac{1}{|\nabla_p\theta|} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right), \quad (3-20)$$

así que las componentes normal y tangencial del vector F_p son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla\theta = - \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla\theta = - \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3-21)$$

y como, según se vio en el libro IMA, si la temperatura potencial de flujo adiabático se conserva, resulta:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \right) + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right], \\ F_s &= \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \right) - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3-22)$$

La divergencia horizontal, la deformación de dilatación, vorticidad vertical y deformación por cizalladura vienen dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} &= 2b \quad (\text{divergencia}), & \zeta_z &= \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} = 2a \quad (\text{vorticidad}), \\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} &= 2c \quad (\text{dilatación}), & \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} &= 2h \quad (\text{cizalladura}), \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = b + c, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = b - c, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = a + h, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = h - a, \quad (3-23)$$

La deformación total es una deformación de dilatación pura en el sistema de coordenadas (x', y') (ver (2-90)), es decir:

$$c' = \sqrt{c^2 + h^2}. \quad (3-24)$$

Entonces la (3-22) utilizando las (3-23) permiten escribir:

$$F_n = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[(b+c) \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} ((h-a) + 2(a+h)) - (b-c) \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3-25)$$

$$F_s = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[(b+c) \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \right) - (b-c) \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right],$$

o bien

$$F_n = \frac{-b}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{c}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{h}{|\nabla\theta|} \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad (3-26)$$

$$F_s = \frac{-b}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{c}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial\dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \right),$$

y recordando que

$$B = -b|\nabla\theta|, \quad C = -\frac{c}{|\nabla\theta|} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] + h \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad (3-27)$$

resulta:

$$F_n = (B + C) = |\nabla_h\theta| \left\{ c \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - b \right\}. \quad (3-28)$$

$$F_s = |\nabla_h\theta| \left\{ c \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \zeta \right\}.$$

Las expresiones (3-21) se pueden tomar como componentes de un vector \mathbf{Q} , introducido por Hoskins y otros, relativo al escalar conservativo θ , en la forma:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + j \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{d \nabla_h \theta}{dt} = \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta \right) + j \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta \right).$$

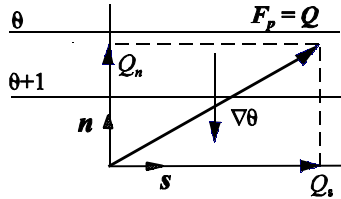


Fig. 3.3. Plano isobárico.

No está de más señalar que si F_p es el vector frontogénico F en el plano x, y , entonces $\mathbf{Q} = F_p$. De manera que \mathbf{Q} es la componente en el plano del vector tridimensional F de Miller. Así que:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \nabla_h \theta = F_p. \quad (3-29)$$

Y también $\mathbf{Q} = Q_n \mathbf{n} + Q_s \mathbf{s}$, que son Q_n con la dirección de $\nabla \theta$ y sentido contrario, y Q_s normal a $\nabla \theta$. Las componentes escalar y de rotación del vector frontogénico en el plano se pueden escribir en la forma:

$$F_n = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta \right) \right] = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} Q_y \right), \quad (3-30)$$

$$F_s = \frac{1}{|\nabla \theta|} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta \right) - \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(- \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta \right) \right] = \frac{1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} Q_x - \frac{\partial \theta}{\partial x} Q_y \right).$$

La componente escalar F_n del vector dimensional F_p (plano isobárico) es:

$$F_n = \frac{-1}{|\nabla \theta|} (\nabla \theta \cdot \mathbf{Q}) = \frac{-\nabla \theta}{|\nabla \theta|} \cdot \mathbf{Q} = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} Q_y \right) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}, \quad (3-31)$$

es decir, es la proyección de \mathbf{Q} en la dirección de la recta de \mathbf{n} y sentido contrario.

$$\mathbf{F}_p = F_n \mathbf{n} + F_s \mathbf{s} = \left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} Q_x - \frac{\partial \theta}{\partial x} Q_y \right) \mathbf{n} \times \mathbf{k} \right]. \quad (3-32)$$

3.3.- LAS ECUACIONES DE F_n Y F_s DESPUÉS DE UN GIRO DE ÁNGULO β

Vamos a referir las ecuaciones (3-38) después del giro un ángulo β que forman el eje x' con el eje de las x (fig. 3.2), y sea δ el ángulo que forma el $\nabla_p \theta$ con el eje de las x cuyo sentido es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial, que en el hemisferio N es hacia el S. Sea \mathbf{n} el vector unitario de $\nabla_p \theta$. Entonces, se tiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = |\nabla \theta| \cos \beta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = |\nabla \theta| \sin \beta, \quad (3-33)$$

$$\theta_x^2 - \theta_y^2 = |\nabla\theta|^2 \cos^2\gamma - |\nabla\theta|^2 \sin^2\gamma = |\nabla\theta|^2 \cos 2\gamma,$$

de manera que

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = |\nabla\theta|^2 (\cos^2\beta - \sin^2\beta) = |\nabla\theta|^2 \cos 2\beta, \quad (3-34)$$

y las componentes de la función frontogénica son:

$$F_n = |\nabla_h\theta| (c \cos 2\beta - b), \quad F_s = |\nabla_h\theta| (c \sin 2\beta - \zeta), \quad (3-35)$$

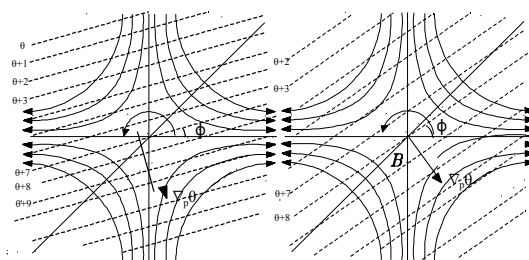


Fig.3.4

que muestra que F_n comprende dos términos relacionados con la deformación de los campos de deformación $2c$ y divergencia $2b$ y F_s comprende dos términos relacionados con el campo de deformación y vorticidad relativa. En la fig. 3.4, que representa un flujo de deformación pura donde las líneas de corriente son continuas, están alineados a lo largo del eje x de dilatación y el eje y de contracción. Las isótermas de temperatura potencial constante se representan por líneas discontinuas. Puede verse que en el panel de la izquierda, el ángulo entre los isótermas y el eje de dilatación es menor de 45° , la deformación es un proceso frontogénico. Cuando el ángulo que forman con el eje de dilatación está comprendido entre 45 y 90° , la deformación es un proceso frontolítico. Esto corresponde al panel derecha (fig. 3.4)

En el caso de que se utilicen las

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} = 2b \text{ (divergencia)}, \quad \zeta_z = \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} = 2a \text{ (vorticidad)},$$

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} = 2c \text{ (dilatación)}, \quad \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} = 2h \text{ (cizalladura)},$$

entonces las derivadas (3-23) son ahora:

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} = 2(b+c), \quad \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} = 2(b-c), \quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} = 2(a+h), \quad \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} = 2(h-a), \quad (3-36)$$

y las ecuaciones (3-28) son:

$$F_n = 2|\nabla_h \theta| (c \cos 2\beta - b) \quad F_s = 2|\nabla_h \theta| (c \sin 2\beta - \zeta). \quad (3-37)$$

Supongamos que el campo de viento no cambia a lo largo del propio y que no hay variaciones en el campo de viento a lo largo de la parte delantera de tal manera que $\partial v_x / \partial x$ y $\partial v_y / \partial y$ son ambos cero. Y aunque esto no siempre es una suposición razonable; sin embargo, ayuda a simplificar el problema. Bajo estos supuestos, la (3-16) como $\nabla_p \theta$ tiene la dirección de y con sentido contrario.

$$\nabla_p \theta = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_p = (-\partial \theta_y)_p, \quad (3-38)$$

F se puede expresar como:

$$F = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_p = \frac{d}{dt} (-\partial \theta_y)_p, \quad (3-39)$$

donde el subíndice p en (3-39) indica que se evalúa sobre una superficie isobárica. Como la temperatura potencial disminuye hacia el norte a través de la zona frontal (es decir, $\partial \theta / \partial y < 0$), valores positivos de (3-39) indican que el gradiente de temperatura potencial meridional se está convirtiendo en más grande (o más fuerte) **siguiendo el movimiento**. Por el contrario, los valores negativos de (3-39) indican que el gradiente potencial meridional de temperatura es cada vez más pequeño (o más débil) siguiendo el movimiento. La expansión (3-39), utilizando las coordenadas (x, y, p) , es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla \theta = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right).$$

Pero, como se ha supuesto, $\partial v_x / \partial t = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) = - \frac{\partial}{\partial y} \left[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathbf{j} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

que si no incluimos, utilizando las coordenadas (x, y, p) , como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \boldsymbol{\omega}$, se cumple:

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right)_p,$$

y multiplicando por -1:

$$F = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right)_p, \quad (3-40)$$

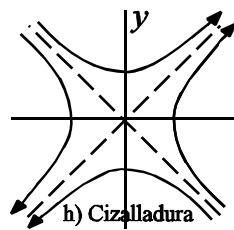
o sea

$$F = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \quad (3-41)$$

cizallamiento difluencia inclinación diabático

donde el subíndice de p de está implícito en todos las derivadas parciales de. (3-41). Hay cuatro términos de forzamiento en el lado derecho de (3-40). De izquierda a derecha, estos son conocidos como la cizallamiento, difluencia, inclinación y diabático.

Término de cizallamiento. Expresando F en función del cizallamiento solo, tenemos:



$$F_c = \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (3-42)$$

Fig. 3.5.

El término cizalla es una función que consta de dos términos: (a) el cambio en el viento a lo largo del frente entre el lados frío y caliente de la parte delantera y (b) el cambio de temperatura potencial a lo largo de la parte delantera. Para una zona frontal verdaderamente *recta*, en el que las líneas isentrópicas son paralelos al eje x en todas partes (y no sólo a nivel local), este término es cero porque no hay cambio en la temperatura a lo largo de potencial del frente. Una zona frontal verdaderamente *recta* no siempre existen dentro de la atmósfera real, sin embargo, este término no es siempre cero.

Término difluencia. Expresando F en función solo de la difluencia, tenemos:

$$F_d = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \quad (3-43)$$

La difluencia se define cuando $\partial v_y / \partial y > 0$, mientras la confluencia es definido donde $\partial v_y / \partial y < 0$. Debido a la orientación de los ejes de coordenadas, es el signo de $\partial v_y / \partial y$ el que determina el signo de F_d . Por lo tanto, la confluencia ($\partial v_y / \partial y < 0$) es frontogénica. Esto se manifiesta por advección fría de temperatura potencial en el lado frío de la zona frontal y advección cálida de temperatura potencial en el lado cálido de la zona frontal. La difluencia ($\partial v_y / \partial y > 0$) es frontolítica. Esto se manifiesta por advección cálida de temperatura potencial en el lado frío de la zona frontal y fría potencial advección de temperatura en el lado frío de la zona frontal. Nota que este flujo es a la vez convergente (a lo largo del eje y positivo) y deformado (como asociado con deformación de estiramiento).

Término Inclinación. Expresando (3-41) solo en función de la inclinación, tenemos:

$$F_i = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right). \quad (3-44)$$

Este término de F es el término de inclinación porque representa la inclinación del gradiente vertical de temperatura potencial $\partial\theta/\partial p$ por el gradiente horizontal de movimientos verticales, $\partial\omega/\partial y$. La derivada $\partial\theta/\partial p < 0$, debido a que la temperatura potencial crece a medida que nos elevamos, pues la presión decrece ($\partial p < 0$), es la condición para que en la atmósfera

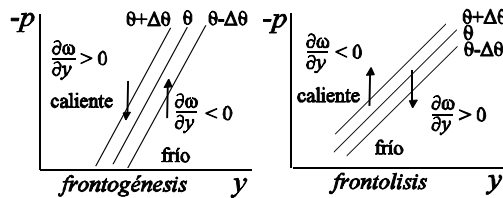


Fig. 3.6.

la estratificación sea estable. Físicamente, esto se manifiesta por el ascenso del aire ($\partial\omega/\partial y < 0$) en el lado frío de la zona frontal y el descenso ($\partial\omega/\partial y > 0$) en el lado caliente (fig. 3.6) de la zona frontal. En otras palabras, el enfriamiento adiabático (expansión) con el ascenso y el calen-tamiento (compresión) asociado al descenso, actúan para intensificar el gradiente meridional de la temperatura potencial por enfriamiento donde el aire

es frío y por calentamiento donde el aire es caliente. Por consiguiente, la confluencia es frontogénica. Cuando $\partial\omega/\partial y > 0$ el enfriamiento adiabático (expansión) asociado con el ascenso y el calentamiento adiabático (compresión) asociado con el descenso actúan para disminuir el gradiente meridional de temperatura potencial por calentamiento donde el aire es frío y enfriamiento cuando es caliente. La difluencia es frontolítica. Este término representa la inclinación de la vertical del gradiente de temperatura potencial $\partial\theta/\partial p$ en la dirección horizontal por movimientos verticales (o, más en concreto, los gradientes horizontales de movimientos verticales).

$\partial\omega/\partial y < 0$ actúa para fortalecer el gradiente de temperatura potencial meridional. Físicamente, ($\omega < 0$) actúa para fortalecer el ascenso en el lado frío de la zona frontal y descenso ($\omega > 0$) en el lado cálido de la zona frontal. Dicho de otra manera, el enfriamiento adiabático (expansión) asociado con ascenso y el calentamiento adiabático (compresión) asociado con el descenso actúa para la intensidad meridional potencial gradiente de temperatura meri-dional por enfriamiento donde es fresco y calentamiento donde es cálido. Por el contrario, $\partial\omega/\partial y > 0$ actúa para debilitar el gradiente de temperatura potencial meridional.

El término inclinación en la troposfera inferior, donde los movimientos verticales son relativamente débiles, es relativamente pequeño, excepto en las regiones de terreno inclinado. Pero puede ser muy importante en la superior troposfera, donde los movimientos verticales son más fuertes. El término de inclinación pueden estar en contradicción con los otros. Un ejemplo de esto se da en la región de entrada de una corriente en chorro de la alta troposfera. El flujo es a menudo confluyente dentro de la región de entrada de una corriente en chorro. Como resultado, el término difluencia implica frontogénesis. Sin embargo, la re-

gión de entrada de una corriente en chorro se caracteriza también por ascenso en la región de entrada de la derecha y descenso en la región de entrada de la izquierda. Debido a la definición del viento térmico, el aire en la lado derecho del chorro debe ser más caliente que en el lado izquierdo del chorro. En consecuencia, el ascenso se produce cuando hace calor y el descenso se produce cuando hace frío, indicativo de lo que se conoce como la circulación directa térmicamente. Como resultado, el término inclinación implica frontólisis.

Del mismo modo, en la región de salida de una corriente en chorro de la alta troposfera, el término difluencia implica frontólisis mientras que el término inclinación implica frontogénesis.

Término diabático. El cuarto término es el forzante diabático, y según (22-134a), es:

$$F_{dia} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = \frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta), \quad (3-45)$$

donde el primer término mide la variación de la velocidad de calor por unidad de masa, que aumenta con la altura, debido al factor $(p_0/p)^k/c_{pa}$; así, el calentamiento (enfriamiento) diabático por cambios de fase sobre la parte cálida (fría) de un frente sería un proceso que contribuiría a la frontogénesis. El último término es la variación a lo largo del eje y de la proyección de $\nabla \theta$ sobre la dirección de la recta de la velocidad, como se vio en el libro IMA, si la temperatura potencial de flujo adiabático se conserva. Y también es la variación de la advección térmica a lo largo del eje y . La advección térmica, $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$, es fría si $-\mathbf{v} \cdot \nabla \theta < 0$, cálida, cuando $-\mathbf{v} \cdot \nabla \theta > 0$. Si $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0$ no hay advección.

Este término representa la variación meridional de calentamiento diabático. Si se calienta donde es ya caliente y se enfría donde ya es fresco, el gradiente de temperatura potencial meridional se hará más fuerte. Esto se asocia primero con $d\theta/dt > 0$ en el aire caliente hacia el sur y $d\theta/dt < 0$, en el aire frío hacia el norte, y después con $\partial(d\theta/dt)/\partial y < 0$ ($F_{dia} < 0$). Físicamente, esto puede ocurrir en la baja troposfera por fuerte calentamiento por insolación en el lado caliente de la parte delantera del frente y ligero enfriamiento por evaporación en la troposfera inferior, debajo de una capa de nubes en el lado frío del frente. La situación es frontogenética. Sin embargo, por la noche, la misma situación puede ser frontolítica con fuerte calentamiento sensible en el lado caliente de la parte delantera se sustituye por enfriamiento que está ausente en el lado frío del frente, debido a los efectos aislantes de la cubierta de nubes.

Otra situación en la que el término diabático puede ser frontogenéticas es la asociada con suelo cubierto de nieve. Suelo cubierto de nieve en el lado frío del frente reforzará y/o intensificar el frente debido a las fuertes características de reflexión y por radiación de nieve. Estos son sólo algunos ejemplos físicos de influencias del término diabático sobre frontogénesis. En términos generales, en la baja troposfera, gradientes de calentamiento sensible contribuyen más fuertemente al término diabático. Mientras que en el centro de la

troposfera superior, gradientes en calefacción latente contribuyen más fuertemente al término diabático

3.4.-LA FUNCIÓN FRONTOGENÉTICA EN DOS DIMENSIONES

En dos dimensiones $z = 0$, la función frontogenética es

$$F_h = \frac{d}{dt} |\nabla_h \theta| = \frac{1}{|\nabla_h \theta|} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla \theta - \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial \theta}{\partial y} \left[\frac{1}{c_{pa}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \frac{\partial \dot{q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \nabla \theta - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \end{aligned} \right), \quad (3-46)$$

el primer sumando de F en dos dimensiones, recordando (2-74), es:

$$\frac{\nabla \theta \cdot \nabla \dot{\theta}}{|\nabla \theta|} = \frac{1}{|\nabla \theta|} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right) = A, \quad (3-47)$$

y el segundo sumando

$$- \frac{\nabla \theta \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \theta)}{|\nabla \theta|} = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3-48)$$

como resulta de hacer $z = 0$ en las ecuaciones de F en tres dimensiones. Por esto, cuando no hay calentamiento diabático (según (2-74), $A = 0$,) F en dos dimensiones es:

$$F_h = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left\{ \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\}. \quad (3-49)$$

Pero según (2-72) se tienen las derivadas

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = b + c, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = b - c, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = h - a, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = h + a, \quad (3-50)$$

con los campos de deformación rotación $2a$, divergencia $2b$, dilatación $2c$ y cizalladura $2h$. La diferencia $b - c$, expresa los efectos de la confluencia y difluencia. Entonces (3-49) es:

$$F_h = \frac{-1}{|\nabla \theta|} \left[(b + c) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + (b - c) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2h}{|\nabla \theta|} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

o bien

$$F_h = \frac{-1}{|\nabla_h \theta|} \left\{ b \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] + c \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] + 2h \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\},$$

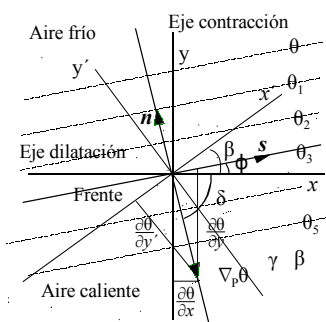


Fig. 3.7. Hemisferio N.

y usando (2-76), en el plano horizontal la función frontogenética, sin calentamiento diabático,

$$\frac{d}{dt} |\nabla_h \theta| = B + C. \tag{3-51}$$

Vamos a referir estas ecuaciones al ángulo ϕ que forman las isoterma de temperatura potencial con el eje de las x (fig. 3.7), y sea δ el ángulo que forma el $\nabla\theta$ con el eje de las x cuyo sentido es hacia los valores crecientes de la temperatura potencial. Sea n es el vector unitario de $\nabla\theta$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = |\nabla\theta|, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \tag{3-52}$$

luego:

$$\theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad \theta_y = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} = |\nabla\theta| \text{sen } \delta, \tag{3-53}$$

y por consiguiente;

$$\theta_x + \theta_y = |\nabla\theta| \text{sen } \delta, \quad C = -\frac{2c}{|\nabla\theta|} (-\theta_y^2) = 2c|\nabla\theta| \text{sen } \delta, \tag{3-54}$$

y puesto que $\delta + \phi = \pi/4$, donde ϕ es el ángulo que forman las isoterma de θ con el eje x :

$$C = 2c|\nabla\theta| \text{sen } \delta = 2c|\nabla\theta| \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \phi \right) = 2c|\nabla\theta| \cos \phi,$$

y por consiguiente, la función frontogenética en el plano, cuando no hay calentamiento diabático ($A = 0$) ni giro, es

$$F_h = C + B = 2|\nabla\theta| (c \cos \phi - b), \tag{3-55}$$

que muestra que la frontogénesis depende de los campos de dilatación $2c$ y divergencia $2b$.

¿Cómo se transforma C después del giro de ángulo? La relación entre las derivadas de θ con respecto a x e y con las θ' son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \cos\beta \frac{\partial\theta'}{\partial x} - \operatorname{sen}\beta \frac{\partial\theta'}{\partial y}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \operatorname{sen}\beta \frac{\partial\theta'}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial\theta'}{\partial y}.\end{aligned}\quad (3-56)$$

Para abreviar la escritura, pongamos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_x, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \theta_y, \quad \frac{\partial\theta'}{\partial x} = \theta_x', \quad \frac{\partial\theta'}{\partial y} = \theta_y', \quad (3-57)$$

con lo cual la (3-56) se puede poner en la forma:

$$\theta_x = \cos\beta\theta_x' - \operatorname{sen}\beta\theta_y', \quad \theta_y = \operatorname{sen}\beta\theta_x' + \cos\beta\theta_y'. \quad (3-58)$$

Como antes del giro es:

$$C = \frac{-1}{|\nabla\theta|} (c\theta_x'^2 - c\theta_y'^2 - 2h\theta_x'\theta_y'), \quad (3-59)$$

calculemos los cuadrados de (3-58):

$$\begin{aligned}\theta_x^2 &= \cos^2\beta\theta_x'^2 + \operatorname{sen}^2\beta\theta_y'^2 - 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\theta_x'\theta_y' = (\operatorname{sen}\beta\theta_y' - \cos\beta\theta_x')^2, \\ \theta_y^2 &= \cos^2\beta\theta_x'^2 + \operatorname{sen}^2\beta\theta_y'^2 + 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\theta_x'\theta_y' = (\operatorname{sen}\beta\theta_x' + \cos\beta\theta_y')^2,\end{aligned}\quad (3-60)$$

y puesto que

$$\begin{aligned}\theta_x^2 - \theta_y^2 &= \cos^2\beta\theta_x'^2 + \operatorname{sen}^2\beta\theta_y'^2 - \cos^2\beta\theta_y'^2 - \operatorname{sen}^2\beta\theta_x'^2 - 4\operatorname{sen}\beta\cos\beta\theta_x'\theta_y' \\ &= \cos^2\beta\theta_x'^2 - \operatorname{sen}^2\beta\theta_x'^2 - (\cos^2\beta\theta_y'^2 + \operatorname{sen}^2\beta\theta_y'^2) - 4\operatorname{sen}\beta\cos\beta\theta_x'\theta_y' \\ &= (\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)(\theta_x'^2 - \theta_y'^2) - 4\operatorname{sen}\beta\cos\beta\theta_x'\theta_y',\end{aligned}\quad (3-61)$$

y siendo

$$\cos 2\beta = (\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta), \quad \operatorname{sen} 2\beta = 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta,$$

multiplicando por c , se tiene:

$$c(\theta_x^2 - \theta_y^2) = c\cos 2\beta(\theta_x'^2 - \theta_y'^2) - 2c\operatorname{sen} 2\beta\theta_x'\theta_y', \quad (3-62)$$

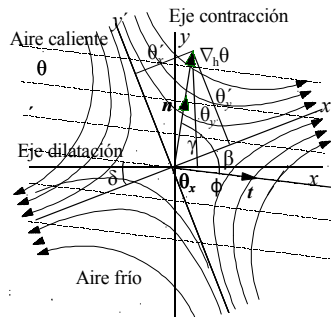
y como

$$C = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[c (\cos 2\beta (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) - 2c \sin 2\beta \theta_x' \theta_y') + \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[2h \cos 2\beta \theta_x' \theta_x' + h \sin 2\beta (\theta_y'^2 - \theta_x'^2) \right] \right]$$

resulta

$$C = \frac{-1}{|\nabla\theta|} \left[(c \cos 2\beta + h \sin 2\beta) (\theta_x'^2 - \theta_y'^2) + 2(h \cos 2\beta - c \sin 2\beta) \theta_x' \theta_y' \right], \quad (3-63)$$

luego, según (3-21), donde se supuso $h' = 0$, resulta:



$$C = \frac{-c'}{|\nabla\theta|} (\theta_x'^2 - \theta_y'^2). \quad (3-64)$$

Hagamos ahora la transformación $(x', y') \rightarrow (n, t)$, donde n es el vector unitario en la dirección y sentido de $\nabla\theta$ y t es perpendicular a n , girado 90° en sentido positivo. Si γ es el ángulo que forma x con $\nabla\theta$ (fig. 3.8), que volvemos a poner aquí, hemisferio S, si ponemos

Fig. 3.8. Hemisferio S.

$$\theta_x' = \frac{\partial\theta}{\partial x'}, \quad \theta_y' = \frac{\partial\theta}{\partial y'}, \quad (3-65)$$

entonces

$$\theta_x' = \frac{\partial\theta}{\partial x'} = |\nabla\theta| \cos \gamma, \quad \theta_y' = \frac{\partial\theta}{\partial y'} = |\nabla\theta| \sin \gamma, \quad (3-66)$$

luego:

$$\theta_x'^2 - \theta_y'^2 = |\nabla\theta|^2 \cos^2 \gamma - |\nabla\theta|^2 \sin^2 \gamma = |\nabla\theta|^2 \cos 2\gamma,$$

luego podemos escribir:

$$C = \frac{-c'}{|\nabla\theta|} |\nabla\theta|^2 \cos 2\gamma = -c' |\nabla\theta| \cos 2\gamma. \quad (3-67)$$

Como

$$\cos 2\gamma = \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\cos 2\beta.$$

y finalmente, si incluimos el término $B = -b|\nabla\theta|$:

$$F_h = C + B = c'|\nabla\theta| \cos 2\beta - b|\nabla\theta| = |\nabla\theta|(c' \cos 2\beta - b), \quad (3-68)$$

estando c' dado por (3-24).

3.5. RELACIÓN DEL VIENTO TÉRMICO

En coordenadas isobáricas, el viento geostrófico es:

$$\mathbf{G} = j \frac{\tau}{l} \nabla_h p = \frac{j}{l} \nabla_p \Psi = j \frac{\mathbf{g}}{l} \nabla_p z, \quad (3-69)$$

de modo que su derivada con respecto a p es:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} = \frac{j}{l} \frac{\partial}{\partial p} \nabla_p \Psi = \frac{j}{l} \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad (3-70)$$

y si utilizamos la ecuación de la fluidoestática

$$dp = -g\rho dz = -\rho d\Psi,$$

y como $p = \rho RT$ (para el aire húmedo $p = \rho_a R_a T$), luego,

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial p} = \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{p}, \quad (3-71)$$

de modo que en componentes es

$$p \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} = j \frac{p}{l} \nabla_p \frac{\partial \Psi}{\partial p} = -j \frac{R}{l} \nabla_p T = -j \frac{R}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3-72)$$

luego

$$p \frac{\partial G_y}{\partial t} = -\frac{R}{l} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad p \frac{\partial G_x}{\partial t} = \frac{R}{l} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3-73)$$

que son las denominadas relaciones del viento térmico. Estas ecuaciones se utilizan en determinadas ocasiones como en 3.8. En realidad el viento térmico es:

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{G}_z - \mathbf{G}_0 = j \frac{g}{l} (z - z_0) \frac{T_z}{\langle T \rangle^2} \nabla_h \langle T \rangle = \frac{j}{l} (\psi - \psi_0) \frac{T_z}{\langle T \rangle^2} \nabla_h \langle T \rangle,$$

donde $\langle T \rangle$ es la temperatura media en el estrato entre las dos alturas. Esta expresión se deduce en IMA (8-18a). Esta ecuación nos da el viento geostrófico a una altura cualquiera, si lo conocemos a otra y conocemos la distribución horizontal de temperaturas, para calcular $\nabla \bar{T}$, y nos hace ver que el viento geostrófico en las alturas es la suma de dos términos. El primero es el viento geostrófico en el nivel de referencia; del segundo solo sabemos que es proporcional al gradiente de temperatura media barométrica y perpendicular a él y que deja las temperaturas altas a la derecha. Este vector se denomina **viento térmico** por estar producido por el gradiente de temperaturas medias entre dos superficie isobaras (aproximadamente horizontales). De manera más simple se puede poner

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0 = \frac{j}{l} \nabla_p (\psi - \psi_0) = g \frac{j}{l} \nabla_p (z - z_0),$$

donde z_0 y z son dos niveles distintos. En realidad el viento térmico es la diferencia que existe entre el viento geostrófico en dos niveles distintos.

3.6. APLICACIÓN DEL VECTOR Q A SITUACIONES SINÓPTICAS

La ecuación omega cuasi-geostrófico

$$\sigma \left(\nabla^2 + \frac{l_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = l_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{G} \cdot \nabla \left(\frac{1}{l_0} \nabla^2 \psi + l \right) \right] - \nabla^2 \left[\mathbf{G} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right], \quad (3-74)$$

permite obtener la rapidez vertical $\omega = dp/dt$, a partir del campo del geopotencial ψ en un instante. Esta ecuación es una excelente herramienta para el diagnóstico sobre la que se han sentado las bases del análisis del tiempo a escala sinóptica. Sin embargo, tiene dos defectos principales: los dos términos del segundo miembro de la ecuación omega cuasi-geostrófica (la advección diferencial de vorticidad geostrófica, el primer término, y el laplaciano del potencial de advección de temperatura). Pero, además, la ecuación omega cuasi-geostrófica depende del sistema de referencia estacionario o que se mueve con el flujo.

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = - \frac{R_a}{p} T, \quad \left(\mathbf{G} \cdot \nabla \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = - \left(\mathbf{G} \cdot \nabla \frac{R_a}{p} T \right). \quad (3-75)$$

La ecuación (3-84), teniendo en cuenta la vorticidad cuasi-geostrófica vertical, ecuación $(\zeta_G)_z = \nabla^2 \psi / l_0$, donde supondremos que $l = l_0$ (cte.) y las ecuaciones que relacionan

el geopotencial con la temperatura, suele llamarse *advección geostrófica de temperatura*, es proporcional a la derivada vertical de esta advección geostrófica. El último término tiende a tener un valor máximo en los ejes de la vaguada y de la dorsal en una onda de desarrollo baroclino. Tiende a ser mayor por debajo de las vaguadas y cuñas en 500 mb, en cambio en los niveles altos es muy pequeño. Pues bien, a menudo estos términos tienen signos diferentes el uno del otro. Sin calcular la intensidad de cada uno, es difícil saber cuál es el más grande (y por tanto, conocer cuál es el que ejerce un control mayor sobre el movimiento vertical a escala sinóptica). Estas deficiencias motivan el deseo de obtener una nueva ecuación para movimientos sinópticos de escala vertical que no tenga estos problemas. Esta ecuación, es conocida como la forma vector \mathbf{Q} de la ecuación omega quasi-geostrófica nos permite obtener la velocidad vertical $\omega = dp/dt$, a partir del campo del geopotencial ψ en un instante.

Decíamos en (IMA; pág 653), las principales dificultades al cálculo cuantitativo de los dos términos forzantes de la ecuación omega se presentan al intentar obtener la advección de vorticidad absoluta con la altura, y el laplaciano de la advección térmica a partir de mapas de geopotencial, vorticidad y espesores (topografías relativas). La ecuación omega presenta muchos problemas en su aplicación para el diagnóstico de campos de movimiento vertical

La ecuación (3-81), teniendo en cuenta la vorticidad quasi-geostrófica vertical, ecuación $(\zeta_G)_z = \nabla^2 \psi / l_0$, y la ecuación (3-82), que relaciona el geopotencial con la temperatura, puede escribirse en la forma:

$$\nabla^2 \omega + \frac{l_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{l_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{G} \cdot \nabla [(\zeta_G)_z + l]] + \frac{R_a}{\sigma p} \nabla^2 (\mathbf{G} \cdot \nabla T). \quad (3-76)$$

Esta ecuación se obtuvo en (IMA) eliminando la tendencia del geopotencial en la ecuación de la energía termodinámica y la ecuación de vorticidad quasi-geostrófica, ecuaciones (22-82a), (IMA, pág 651). Pero nosotros para obtener esta ecuación utilizamos (IMA, pág 653) las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \mathbf{G} = j l \mathbf{D}_y, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) T = S_p \omega, \quad (3-77)$$

la segunda de las cuales es la ecuación de la energía termodinámica, donde S_p es el parámetro de estabilidad. Haciendo operaciones se llega a la ecuación

$$\sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} - l^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} = 2 \frac{R_a}{p} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T, \quad (3-78)$$

donde $\sigma = R_a S_p / p$ es el parámetro de estabilidad fluidoestática y R_a la constante de los gases para el aire húmedo. Teniendo en cuenta que el vector \mathbf{Q} tiene las componentes:

$$Q_x = -\frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T \right), \quad Q_y = -\frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T \right), \quad (3-79)$$

así que las componentes de \mathbf{Q} representan las variaciones de temperatura y las variaciones del viento geostrófico. ∇T es perpendicular a la isoterma en cada punto. El vector \mathbf{Q} es:

$$\mathbf{Q} = Q_x + jQ_y = -\frac{R_a}{p} (\nabla \mathbf{G} \cdot \nabla T). \quad (3-80)$$

La ecuación (3-78) con (3.79) se transforma en

$$\sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} - l_0^2 \frac{\partial D_x}{\partial p} = -2 Q_x, \quad \sigma \frac{\partial \omega}{\partial y} - l_0^2 \frac{\partial D_y}{\partial p} = -2 Q_y, \quad (3-81)$$

de modo que multiplicando por j la segunda y sumando, resulta:

$$\sigma \nabla^2 \omega - l_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \nabla \cdot \mathbf{D} = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (3-82)$$

que es la *ecuación omega en función del vector Q*. En 1,7 se obtuvo esta ecuación para l no constante. Esta ecuación contiene términos forzantes relacionados con el movimiento vertical ω y el viento ageostrófico \mathbf{D} . Entonces, teniendo en cuenta que:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (3-83)$$

es la ecuación de continuidad aplicable en el sistema cuasi-geostrófico,

$$\sigma \nabla^2 \omega + l_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (3-84)$$

que también se puede escribir en la forma:

$$\sigma \left(\nabla^2 + l^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}. \quad (3-85)$$

Las ecuaciones (3-82), (3-84) y (3-85) son distintas formas de la ecuación omega cuasi-geostrófica. El movimiento vertical cuasi-geostrófico se debe enteramente a la divergencia del vector \mathbf{Q} , que se puede calcular o estimar. A diferencia de la forma normal de la ecuación omega cuasi-geostrófica, no hay términos forzantes que presenten conflicto uno con el otro, lo cual constituye una ventaja significativa. Del mismo modo, no existen las derivadas parciales con respecto a la presión, lo que significa que solo necesitamos los datos de una sola superficie isobárica para diagnosticar el movimiento vertical, lo que es otra ven-

taja. Al igual que con la forma regular de la ecuación omega cuasi-geostrófica, se aplica esta ecuación para la diagnóstico de los movimientos verticales de la troposfera media. El movimiento vertical del aire de forma esquemática se representa en la fig. 3.1, donde se muestra la dirección de la desviación \mathbf{D} del viento ageostrófico, la dirección del vector \mathbf{Q} y los ascensos y descensos del aire en las zonas cálida y zona fría en una zona frontal. La ecuación (3-85) que nos hace ver que en el caso de que ω sea positivo ($\omega > 0$, la presión aumenta), entonces hay descenso del aire (recuérdese que $\omega = -\rho g v_z$, si la velocidad es hacia arriba, entonces $\omega < 0$ y si es hacia abajo $\omega > 0$) y $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ es negativo y, por tanto, hay divergencia. Por el contrario, si ω es negativo, hay ascenso del aire, \mathbf{Q} es positivo y hay convergencia. Por tanto, cuando el aire asciende ($\omega < 0$, la presión disminuye) donde hay **convergencia** ($\nabla \cdot \mathbf{Q} < 0$) y hay descenso (la presión aumenta, $\omega > 0$) donde hay **divergencia** ($\nabla \cdot \mathbf{Q} > 0$).

El vector \mathbf{Q} definido en la ecuación (3-79), de componentes (3-78) si utilizamos la ecuación de la fluidoestática: $dp = -\rho g dz = -\rho d\psi$, se tiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\tau = -\frac{R_a T}{p}, \quad T = -\frac{p}{R_a} \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad (3-86)$$

relación que liga el potencial con la temperatura (R_a constante aire seco) se puede poner para las componentes del vector \mathbf{Q} :

$$Q_x = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right), \quad Q_y = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right),$$

pues p es constante en la isobara, de manera que también:

$$\mathbf{Q} = -\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right], \quad (3-87)$$

así que el segundo miembro de representa las variaciones de temperatura debidas a las variaciones del viento geostrófico. Y donde j es la unidad imaginaria

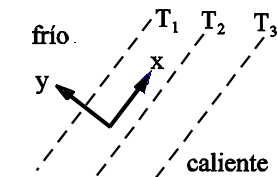


Fig. 3.9.

Sin llegar a calcular \mathbf{Q} , de componentes las derivadas parciales horizontales de \mathbf{G} y T , y su divergencia. Con el fin de ayudar en la estimación de \mathbf{Q} y su divergencia en un mapa del tiempo utilizamos una transformación de coordenadas, en un sistema de coordenadas parecido al sistema natural de coordenadas. El módulo y la dirección del vector en un punto determinado de un mapa sinóptico pueden obtenerse utilizando un sistema cartesiano en el que el eje x se tome en la dirección de la isoterma que pase por el punto, dejando el aire frío a la izquierda en el hemisferio N y el aire cálido a la derecha (fig. 3.9). En estas condiciones la componente x de T es $\partial T / \partial x = 0$, y

$$\nabla T = j \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3-88)$$

con lo que, las derivadas (3-86) del vector \mathbf{Q} en este sistema de coordenadas son:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T = \frac{\partial G_y}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T = \frac{\partial G_y}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y},$$

pues el viento geostrófico es no divergente, luego:

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial G_x}{\partial x} = -\frac{\partial G_y}{\partial y}, \quad (3-89)$$

y el vector \mathbf{Q} también se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{Q} = -\frac{R_a}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - j \frac{\partial G_x}{\partial x} \right) = -\frac{R_a}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\mathbf{k} \times j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \right), \quad (3-90)$$

pues:

$$\mathbf{k} \times j \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} & j \frac{\partial G_x}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial G_y}{\partial x} - j \frac{\partial G_x}{\partial x}. \quad (3-91)$$

También, puesto que según (fig. 3.3), $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = -1$,

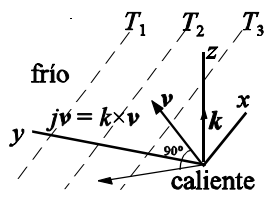


Fig. 3.3..

$$\mathbf{Q} = \frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}. \quad (3-92)$$

Según esto, se puede obtener el vector \mathbf{Q} calculando la variación de \mathbf{G} a lo largo de la isoterma, con aire frío a la izquierda. Para evaluar \mathbf{Q} , lo primero que debemos encontrar es el cambio de vectores en \mathbf{G} a lo largo de la isoterma. La unidad imaginaria $j = \mathbf{k} \times$, geoméricamente, se manifiesta como la *regla de la mano derecha* y significa que un vector cualquiera \mathbf{v} al multiplicar por j le hace girar 90° en sentido horario. A continuación, multiplicamos este vector por $\partial T/\partial y$, o la intensidad del gradiente de temperatura. No es necesario multiplicar por R_a/p , ya que, sobre una superficie isobárica, tanto R_a y p son constantes en el espacio, de manera que el movimiento vertical forzado puede ser obtenido a partir de observaciones del viento o del geopotencial ψ y T , en una superficie isobárica (fig. 3.4) resultante de las variaciones horizontales del viento geostrófico. El vector \mathbf{Q} describe los

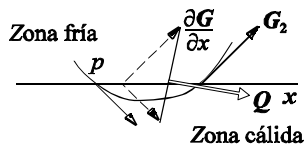


Fig. 3.4.

cambios temporales de la distribución de temperatura en una superficie de presión. Si seguimos este procedimiento en varios lugares en un mapa del tiempo, se puede estimar la div \mathbf{Q} y, por tanto, estimar al menos el signo del movimiento vertical. Así que teniendo en cuenta que $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -1$, resulta:

$$\mathbf{Q} = -\frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \left(\mathbf{k} \times \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s} \right) = \frac{R_a}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s}. \quad (3-93)$$

Como ejemplo de aplicación, consideremos, en el hemisferio N , un anticiclón y una borrasca, con las isotermas en líneas discontinuas. El aire frío al N y el cálido al S (fig. 3.5). En las inmediaciones de las áreas de alta presión, al norte, el viento geostrófico tiene la dirección y sentido del eje x (hacia el este), y en el sur (hacia el oeste). En las bajas presiones, al norte, el viento geostrófico tiene la dirección contraria al eje x . Para restar al viento geostrófico al sur el viento geostrófico al norte, basta sumar el viento geostrófico del norte girado 180° al viento del sur.

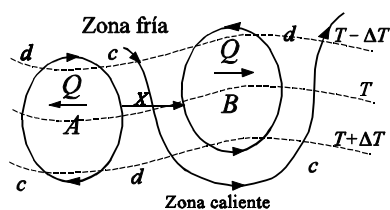


Fig. 3.5.

se ve que en los borrascas la resultante del viento geostrófico tiene sentido oeste-este y en los anticiclones tiene sentido de este-oeste. El análisis del vector \mathbf{Q} muestra que es un vector que tiene sentido este-oeste en las áreas de alta presión y un vector con sentido hacia el este en el área de baja presión. La longitud o módulo de \mathbf{Q} se puede determinar, según (3-101), multiplicando el viento geostrófico resultante obtenido por la intensidad del gradiente de temperatura. Como \mathbf{Q} en el anticiclón tiene sentido oeste, contrario a x , y en la zona este de alta presión hay divergencia ($\nabla \cdot \mathbf{Q} > 0$), esto supone descenso del aire ($\omega > 0$), mientras que en la zona oeste hay convergencia ($\nabla \cdot \mathbf{Q} < 0$), lo que supone ascenso ($\omega < 0$), la velocidad vertical es negativa. La velocidad vertical ω tiene sentido contrario a v_z ($\omega = dp/dt \approx -\rho g v_z$). En la parte norte, zona fría, hay divergencia en el oeste del anticiclón y en la parte este de la borrasca, por tanto ($\nabla \cdot \mathbf{Q} > 0$, $\omega > 0$, hay descenso). En la parte sur, zona caliente, hay convergencia ($\nabla \cdot \mathbf{Q} < 0$, $\omega < 0$, hay ascenso). En otras palabras, donde la velocidad vertical ω es positiva hay divergencia y descenso del aire y donde la velocidad vertical ω es negativa hay convergencia y ascenso del aire.

3.7.- DERIVADA SUSTANCIAL DEL MÓDULO DEL GRADIENTE DE TEMPERATURA HORIZONTAL

En el apartado 2.5. calculamos esta derivada y llegamos a la ecuación vectorial

$$\frac{d}{dt} |\nabla_h T| = \frac{1}{|\nabla_h T|} \left[\nabla_h T \cdot \frac{d}{dt} \nabla_h T \right]. \quad (3-94)$$

El primer factor de (3-94) es ∇T , suprimimos h por brevedad, y es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y},$$

y para obtener el segundo vamos a recordar que la derivada sustancial de la temperatura, suponiendo aproximación geostrófica (donde $\mathbf{v} = \mathbf{G}$), es::

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) T = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla T. \quad (3-95)$$

El segundo factor de (3-94) es la derivada del gradiente de un escalar. Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla T &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \nabla T \\ &= \nabla \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \nabla T = \nabla \left(\frac{dT}{dt} - \mathbf{G} \cdot \nabla T \right) + \mathbf{G} \cdot \nabla \nabla T \\ &= \nabla \frac{dT}{dt} - \nabla \mathbf{G} \cdot \nabla T - \mathbf{G} \cdot \nabla \nabla T + \mathbf{G} \cdot \nabla \nabla T, \end{aligned} \quad (3-96)$$

pues los operadores ∇ y $\partial/\partial t$ son conmutables. Entonces;

$$\frac{d}{dt} \nabla T = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) T = \nabla \frac{dT}{dt}, \quad (3-97)$$

de modo que también los operadores ∇ y d/dt son conmutables. El último término es:

$$\nabla \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dT}{dt} + j \frac{\partial}{\partial y} \frac{dT}{dt}.$$

Calculemos estas derivadas. Se tiene para la componente x e y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T, \quad (3-98)$$

Ahora bien, las componentes del último término de (3-98), según 1.7. está relacionado con las componentes del vector \mathbf{Q} , en la forma:

$$Q_x = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T \right), \quad Q_y = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T \right). \quad (3-99)$$

con lo que se tiene:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T\right) = -\frac{p}{R} Q_x, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T\right) = -\frac{p}{R} Q_y, \quad (3-100)$$

luego

$$\frac{d}{dt} \nabla T = \nabla \frac{dT}{dt} - \frac{p}{R} \mathbf{Q}. \quad (3-101)$$

Por tanto, en la aproximación geostrófica la derivada sustancial de la temperatura horizontal depende del gradiente de la derivada sustancial de la temperatura horizontal y del vector proporcional a \mathbf{Q} . Si los dos términos son iguales esta derivada es nula.

La ecuación (3-94) es ahora:

$$\frac{d}{dt} |\nabla_h T| = \frac{1}{|\nabla_h T|} \left[\nabla_h T \cdot \left(\nabla_h \frac{dT}{dt} - \frac{p}{R} \mathbf{Q} \right) \right]. \quad (3-102)$$

3.8. DERIVADA SUSTANCIAL DEL MÓDULO DEL GRADIENTE DE LA TEMPERATURA EN FLUJO GEOSTRÓFICO

Si suponemos flujo geostrófico la ecuación reducida de la energía termodinámica

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla T - S_p \omega = 0, \quad (3-103)$$

todavía se puede simplificar más, si suponemos que el flujo es puramente geostrófico, de manera que el término velocidad vertical $S_p \omega$ desaparece y

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla T = 0, \quad (3-104)$$

con lo cual,

$$\frac{d_G T}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{G} \cdot \nabla \right) T = 0, \quad (3-105)$$

y, según la ecuación (3-102), resulta:

$$\frac{d_G}{dt} \nabla T = \nabla \frac{d_G T}{dt} - \frac{p}{R} \mathbf{Q}, \quad (3-106)$$

pero, según (3-105) la derivada total es nula. Por consiguiente

$$\frac{d_G}{dt} \nabla T = -\frac{p}{R} \mathbf{Q}, \quad (3-107)$$

ecuación que demuestra que en flujo puramente geostrófico el gradiente de la derivada sustancial de la temperatura horizontal es proporcional al vector \mathbf{Q} .

$$\frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{p}{R} Q_x, \quad \frac{d_G}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\frac{p}{R} Q_y. \quad (3-108)$$

Y ahora la ecuación (3-102) se puede escribir en la forma:

$$\frac{d_G}{dt} |\nabla_h T| = \frac{-1}{|\nabla_h T|} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{p}{R} Q_x + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{p}{R} Q_y \right), \quad (3-109)$$

o en forma vectorial:

$$\frac{d_G}{dt} |\nabla_h T| = \frac{-1}{|\nabla_h T|} \frac{p}{R} (\nabla_h T \cdot \mathbf{Q}), \quad (3-110)$$

Esta ecuación significa que la derivada sustancial del módulo del gradiente de temperatura horizontal mediante procesos puramente geostróficos es proporcional al producto escalar del gradiente de temperatura horizontal $\nabla_h T$ (con sentido aire frío hacia aire caliente) y los vectores \mathbf{Q} , lo cual a su vez depende de la orientación de los vectores, ya que el producto escalar de dos vectores puede ser nulo, si son perpendiculares y positivo (negativo) si el ángulo que forman es $<90^\circ$ ($>90^\circ$).

Si tenemos en cuenta la relación del viento térmico, ecuación (3-73):

$$p \frac{\partial G_y}{\partial p} = -\frac{R}{l_0} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad p \frac{\partial G_x}{\partial p} = \frac{R}{l_0} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3-111)$$

el gradiente de la temperatura horizontal es:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{pl_0}{R} \left(-\frac{\partial G_y}{\partial p} + j \frac{\partial G_x}{\partial p} \right) = \frac{pl_0}{R} j \left(\frac{\partial G_x}{\partial p} + j \frac{\partial G_y}{\partial p} \right), \quad (3-112)$$

de modo que, según (3-107), la derivada:

$$\frac{d_G}{dt} \nabla T = -\frac{p l_0}{R} j \frac{d_G}{dt} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p} = -\frac{p}{R} \mathbf{Q}, \quad (3-113)$$

luego

$$l_0 \frac{d_G}{dt} \left(-\frac{\partial G_y}{\partial p} + j \frac{\partial G_x}{\partial p} \right) = \mathbf{Q} = Q_x + j Q_y, \quad (3-114)$$

y por consiguiente

$$Q_x = -\frac{d_G}{dt} \left(l_0 \frac{\partial G_y}{\partial p} \right), \quad Q_y = \frac{d_G}{dt} \left(l_0 \frac{\partial G_x}{\partial p} \right), \quad (3-115)$$

que tienen distinto signo. Al obtener la ecuación omega en 1.7., vimos que las componentes del vector \mathbf{Q} eran las siguientes:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \cdot \nabla T \right) = -\frac{p}{R} Q_x, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \cdot \nabla T \right) = -\frac{p}{R} Q_y, \quad (3-116)$$

que nos hace ver que antes las intensidades y signos de Q_x y Q_y eran iguales, mientras que ahora, ecuación (3-115) tienen la misma módulo, pero sentidos opuestos. Esto significaría que el forzamiento del gradiente de temperatura y cizalladura vertical del viento no están en equilibrio. En cambio, si se mantiene el equilibrio del viento térmico, (3-117) no sería de signo opuesto. Y esto ocurre con flujo puramente geostrófico, donde

$$\mathbf{G} = \frac{j}{l} \nabla_p \Psi = \frac{j}{l} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + j \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{1}{l} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} + j \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

y en coordenadas:

$$G_x = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad G_y = \frac{1}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

tienen signos opuestos. Porque existe esta discrepancia de signo, la circulación ageostrófica (que hemos eliminado) y el movimiento vertical que le acompaña debe funcionar para compensar esta discrepancia de signo, a través de los vectores \mathbf{Q} , y, por lo tanto, tratar de restablecer el equilibrio del viento térmico.

ERRORES EN INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE LA ATMÓSFERA

Pág. 135, línea +5 y +7, poner δq donde dice δi (5-60).

línea -4, poner δq donde dice δi (5-62).

Pág. 136, poner δq en (5-65) y (5.67).

Pág. 158, línea +1 y +3, poner $(1/2)\nabla v^2$.

Pág. 658, a la fórmula (22-99) y la (22-99a) son:

$$\mathbf{Q} = -\frac{R}{p}(\nabla T \cdot \nabla \mathbf{G}) = -\frac{R}{p}\nabla T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \mathbf{j} \right) = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \mathbf{j} \right), \quad (22-99)$$

Borrar "También, puesto que según (22-37), $\mathbf{k} \times = \mathbf{j}$ ".

Escribir: y puesto que $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$:

$$\mathbf{Q} = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{G}_x}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} (\mathbf{k} \times \nabla G_x). \quad (22-99a)$$

Pág. 659, la fórmula (22-99b) debe ser

$$\mathbf{Q} = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} = \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial n} (\mathbf{k} \times \nabla G_x). \quad (22-99b)$$

Pág. 672, línea 12, multiplicando estas ecuaciones. por $\cos \beta$ y $\sin \beta$ y sumando. Multiplicando por $\sin \beta$ y $\cos \beta$ y restando se tiene:

Pág. 674, línea +3

$$\nabla_h \theta \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Pág. 761, línea -3, la ecuación (18) es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) - \sigma \omega = 0, \quad (18)$$

Pág. 762. fórmula (22), el segundo término es positivo: $+\partial \mathbf{G}/\partial x \cdot \nabla()$.

Pág. 763. fórmula (25) el último término de la primera ecuación es $-Q_x - l_0^2 \partial D_x / \partial p = 0$.

También se puede poner: $+Q_x + l_0^2 \partial D_x / \partial p = 0$ y sumar

Pág. 769. Las dos últimas fórmulas (58) son:

$$lG_x = \tau \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad lG_y = -\tau \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$